Correction DS 6 - Série générale.

Exercice 1 :

$\ln(3x+1) \geqslant \ln(3-x)$

$\begin{cases} 3x+1>0 \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \underbrace{\left]-\frac{1}{3};3\right[}_{\mathcal{D}}$

$\forall x \in \mathcal{D}$, $\ln(3x+1) \geqslant \ln(3-x)$

$\Leftrightarrow 3x+1 \geqslant 3-x$

$\Leftrightarrow 4x \geqslant 2$

$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$

Ainsi $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2};3\right[$

Exercice 2 :

$\boxed{\text{Partie A}}$ $u(x) = \ln(x) + x - 3 \quad \forall x>0$

1°) u dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u'(x) = \frac{1}{x}+1>0$ donc u croissante sur $]0;+\infty[$

2°) Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} u(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$

Ainsi, sur $]0;+\infty[$, u est continue, strictement croissante et $0 \in]-\infty;+\infty[$ donc d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $\alpha \in]0,+\infty[$ solution de l'équation $u(x)=0$.

$u(2) = \ln 2 - 1 < 0$ et $u(3) = \ln 3 > 0$ donc $\alpha \in]2;3[$

3°) Par croissance de u sur $]0;+\infty[$, on en déduit

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

$\boxed{\text{Partie B}}$ Sur $]0;+\infty[$, $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2$

1°) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(1-\frac{1}{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\ln x - 2) = -\infty \end{array}\right\}$ Par opération sur les limites, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$

2°) $\forall x \in]0,+\infty[$ $f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln(x)-2) + \left(1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x} = \frac{\ln(x)+x-3}{x^2}$

2b) d'après la question $\boxed{A3}$,

x	0 α $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
f	$+\infty \searrow f(\alpha) \nearrow +\infty$

$$\left(\begin{aligned} &\ln(\alpha) = 3-\alpha \\ &f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(1-\alpha) + 2 \\ &\quad = 1 - \frac{1}{\alpha} - \alpha + 1 + 2 = 4 - \frac{1}{\alpha} - \alpha \end{aligned} \right)$$

$\boxed{\text{Partie C}}$ $\mathcal{C}' : y = \ln(x)$

1°) Soit $x \in]0;+\infty[$ $\quad f(x) - \ln(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - \cancel{2}) + \cancel{2} - \ln(x)$

$$= -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2 - \ln(x)}{x}$$

$f(x) - \ln(x) = 0 \iff 2 - \ln(x) = 0 \iff x = e^2$ et $\ln(e^2) = 2$

donc le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est le point $A(e^2 ; 2)$

2°) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \ln(x)$ est une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$.

or $\dfrac{2 - \ln(x)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{\frac{2}{\ln(x)} - 1}{1}$ et d'après le théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \ln(x) = 0$

Ainsi la courbe de f va se rapprocher de $\mathcal{C}'$ quand x devient grand

Exercice 3 QCM

1°) $S = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{4}{5}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{6}{7}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$ $= \frac{1}{2}(\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \cancel{\ln(2)}) + \frac{1}{2}(\cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 3}) + \cdots + \frac{1}{2}(\cancel{\ln 7} - \ln(8))$

$= \frac{1}{2}(-\ln(8)) = -\frac{1}{2}\ln(2^3) = -\frac{3}{2}\ln 2$ (c)

2°) $f(x) = 5x + e^{-x} - \ln(x)$.

$\lim 0$: $\quad 0 \quad 1 \quad -(-\infty)$ $\quad$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ (c)

3°) $ae^{bx} = be^{ax} \iff \ln(ae^{bx}) = \ln(be^{ax}) \iff \ln(a) + \ln(e^{bx}) = \ln(b) + \ln e^{ax}$

$\iff bx - ax = \ln b - \ln a$

$\iff x = \dfrac{\ln b - \ln a}{b - a}$ (c)

4°) $f(x)=\ln(e^x+1)$. tangente en 0

$f(0)=\ln 2$. $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ donc $f'(0)=\dfrac{1}{2}$

Equation de la tangente en 0 : $y=\frac{1}{2}x+\ln 2$ (c)

Intersection avec l'axe (Ox) : $\frac{1}{2}x+\ln 2=0 \iff x=-2\ln 2=-\ln 2^2=\ln\left(\frac{1}{4}\right)$

Exercice 4.

$f(x)=e^{-x}\cos x$ et $g(x)=e^{-x}$ sur $[0;+\infty[$, $h(x)=g(x)-f(x)=e^{-x}(1-\cos x)$

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ Asymptote horizontale $y=0$

2°) $\forall x\in[0;+\infty[$, $h(x)=\underbrace{e^{-x}}_{>0}\underbrace{(1-\cos x)}_{\geqslant 0}$ donc $\forall x\geqslant 0$, $h(x)\geqslant 0$

$\iff g(x)\geqslant f(x)$

Donc $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $\mathcal{C}_f$

3°) Soit $x\geqslant 0$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)$

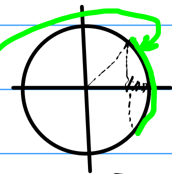
$=\cancel{\sqrt{2}}\left(\cos x\times\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}+\sin x\,\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}\right)$

$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$

4°) a) $h'(x)=-e^{-x}(1-\cos x)+e^{-x}\times\sin x=e^{-x}(\cos x+\sin x-1)$

donc $h'(x)=e^{-x}\left(\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right)$

4°) b) $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\geqslant 0 \iff \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



$\iff x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right] \iff x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

et $\forall x\in\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]\leftarrow$ le reste du cercle $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\leqslant 0$

4°) c) D'où les variations de h sur $[0,2\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		2π
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	$h\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\searrow$	0

$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}\times(1-0)=e^{-\frac{\pi}{2}}$

Exercice 5 :

1. On donne la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+u_n} \end{cases}$.

Compléter la fonction `terme` ci-dessous pour afficher la valeur du terme de rang n de la suite (u_n).

```
def terme(n):
    u=1
    for i in range(n) :
        u = u/(2+u)
    return u
```

2. On donne la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 0,8 \times v_n + 5 \end{cases}$.

Compléter le programme ci-dessous pour afficher le rang de la première valeur de la suite (v_n) dépassant (ou égalant) 20.

```
v=1
n=0
while v < 20 :
    v = 0,8 * v + 5
    n = n+1
print(...)
```