Le 22 Décembre 2023 DS n° 4 CPES

Nom : **Prénom :** **Série générale**

Calculatrices autorisées. Le barème, fixé à 25 points est donné à titre indicatif et n'a rien de définitif. Le problème ne sera pas noté et à terminer à la maison.
Ne trichez pas, ne chouinez pas, ne répondez pas à des questions qu'on ne vous pose pas et appliquez-vous à rédiger de façon efficace et concise. Donnez tout ce que vous pouvez, le Père Noël vous le rendra au centuple.
⚠***Le sujet est recto-verso***

Exercice 1 /4,5

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, **on ne détaillera pas l'étude des ensembles de dérivabilité** :

1. f définie par $f(x) = \dfrac{4}{(3x^2-5x+4)^5}$
2. g définie par $g(x) = x\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)$
3. h définie par $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-4}$

Exercice 2 /2,5

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{2+\cos x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que la fonction f est paire.
3. Montrer que la fonction f est 2π−périodique.

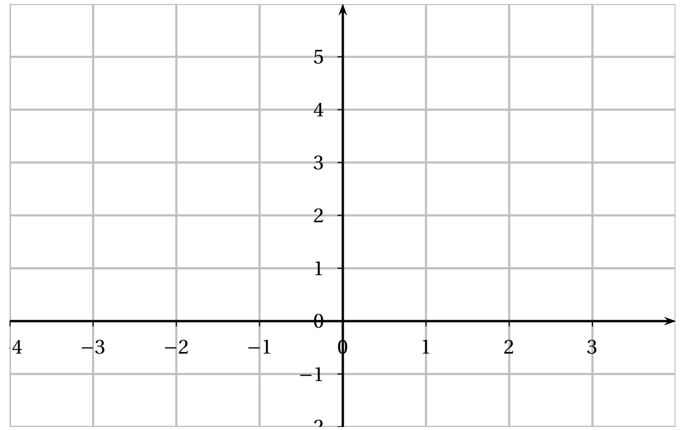
Exercice 3 /1,5

Résoudre l'équation suivante : $\sqrt{13-x^2} = 2x-1$

Exercice 4 /3,5

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2x-1| - \dfrac{1}{2}|3-2x|$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Écrire l'expression $f(x)$ sans valeurs absolues suivant les valeurs de x.
3. Représenter le graphe de la fonction f dans le repère ci-dessous :

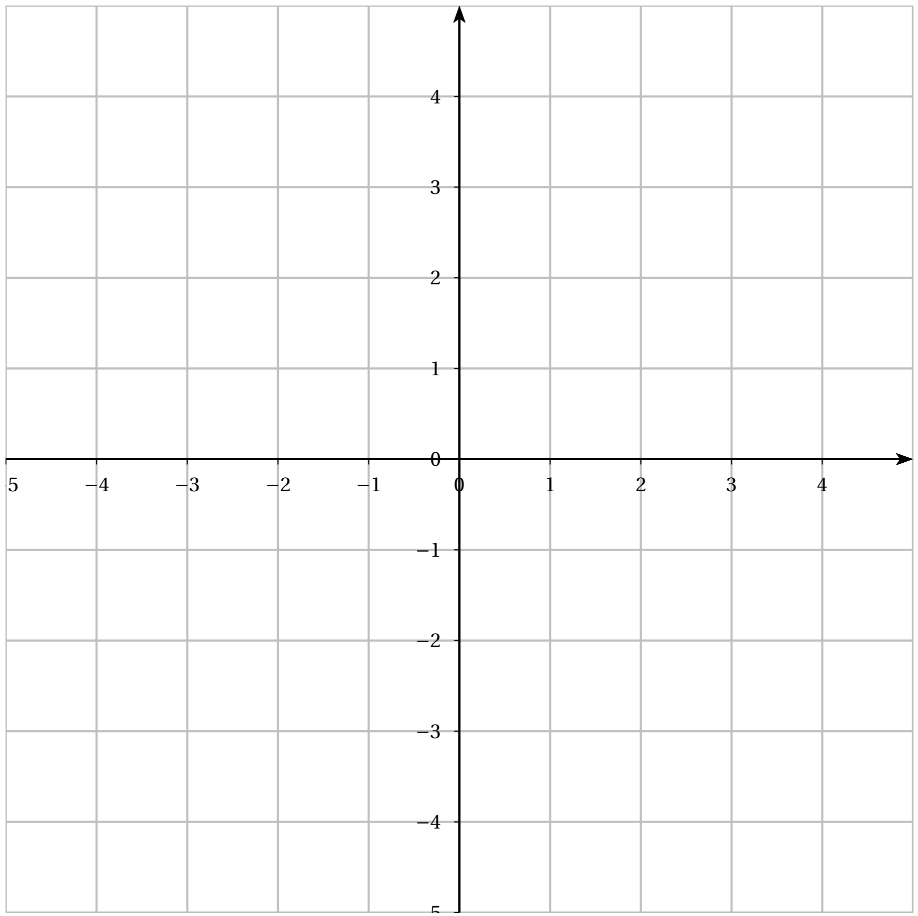


Exercice 5 /13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2+1}$, et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal

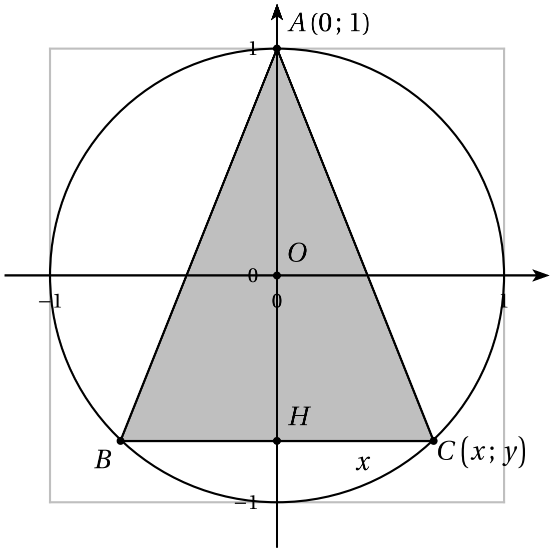
1. ***Étude d'une fonction auxiliaire*** /4,5
   On pose $g(x) = x^3+3x+8$
   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera un encadrement à 10^{-2}.
   (e) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. ***Étude de f*** /4,5
   (a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de f.
   (b) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{\left(x^2+1\right)^2}$
   (c) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (d) Étudier les limites et $+\infty$ et $-\infty$ et dresser le tableau de variations de f.
   (e) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$
3. ***Étude du comportement en l'infini*** /2,5
   (a) Déterminer quatre réels a, b,c et d tels que $f(x) = ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x$.
   Quelle interprétation graphique peut-on faire de ces résultats ?

4. ***Tracé*** /1,5
   Dans le repère ci-dessous, on fera apparaître une allure du graphe $\mathscr{C}$ de la fonction f. On mettra en évidence les tangentes horizontale, les asymptotes éventuelles. En particulier, indiquer le coefficient directeur de la tangente au point d'abcisse 1.



Exercice 6 — **Problème - Non noté**

Dans cet exercice, on va déterminer quel est le triangle isocèle inscrit dans un cercle de rayon 1 qui a une aire maximale. On se place donc dans le cercle « trigonométrique », centré en O et de rayon 1.



On considère un triangle ABC, isocèle en A, inscrit dans un cercle de rayon 1. H est le pied de la hauteur issue du sommet principal. A est fixe et le point C est mobile sur le cercle, on appelle x l'abscisse de C, et y son ordonnée.

On a $x \in [0;1]$.

Les coordonnées des points sont : $A(0;1)$, $B(-x;y)$ et $C(x;y)$.

1. Justifier que $C(x;y)$ appartient au cercle si et seulement si $x^2+y^2=1$.
2. Justifier que $AH = 1-y$. En déduire que l'aire du triangle isocèle ABC est $x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)$.
3. On pose, pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) = x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)$.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in [0;1[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}+1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (b) Résoudre l'équation $\sqrt{1-x^2} = 2x^2-1$. En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f.
4. Quelle est la nature du triangle isocèle d'aire maximale inscrit dans le cercle unité ?