

Feuille de TD n°9

TD — Limites de suites

1 Recherche de seuils

Soit (w_n) une suite définie pour tout entier non nul n par $w_n = 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}$

- Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $w_n \in]1,99; 2,01[$.
- Déterminer le plus petit entier n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, on a $|w_n - 2| < 10^{-4}$.
- Soit ε un nombre réel strictement positif. Déterminer le plus petit entier n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$, on a $|w_n - 2| < \varepsilon$.

2 Déterminer deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant les conditions suivantes :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = 3$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = 3$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 3$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$

3 Donner, dans chaque cas, la limite de la suite si elle existe.

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> $u_n = \sqrt{n} + n^2$ $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{n^2}$ $u_n = ((n + \pi^n))$ $u_n = 3 + \frac{1}{n^4}$ $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - n^3$ $u_n = -4 + \left(\frac{7}{10}\right)^n + n^5$ $u_n = n^2 - n$ $u_n = -n + \sqrt{n}$ $u_n = -(-\sqrt{n} + n^7)$ $u_n = -(n^6 - n^3)$ $u_n = n^6 - n^4 + n^2 - n$ $u_n = (n^5 - 4)(3 - n)$ $u_n = 5 \times \left(\frac{185}{192}\right)^n$ $u_n = \left(3 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(\frac{1}{n^2} - 4\right)$ | <ol style="list-style-type: none"> $u_n = -2 \times \left(\frac{18}{17}\right)^n$ $u_n = \frac{1}{n^2} (n - 2)$ $u_n = \frac{1}{n} (n - 2)$ $u_n = \frac{1}{n} (n^3 - 2)$ $u_n = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}$ $u_n = \frac{3n^2 + 4}{2n + 5}$ $u_n = \frac{2n - 1}{5 - 3n}$ $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^3}$ $u_n = \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^n}{\left(\frac{5}{3}\right)^n}$ |
|--|--|

4 Théorèmes de comparaison :

- Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $u_n \geq n^2 + 1$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- Soit (v_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $v_n \leq -3n - 4$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

- Soit (w_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $2n - 1 \leq w_n \leq 2n + 1$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.
- Soit (t_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2n + 1} \leq t_n \leq \frac{1}{2n - 1}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$.

5 algorithme de seuil On considère la suite (u_n) définie \mathbb{N} par $u_{n+1} = 1,2 \times u_n$, $u_0 = 1$.

- Quelle est la limite de (u_n) ?
- Écrire une fonction en Python permettant de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle u_n aura dépassé deux fois la valeur initiale.
- Adapter l'algorithme pour qu'il renvoie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1000$.
- Généraliser à un seuil quelconque.

6 Théorème de convergence monotone

Soit (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

- À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement (variations, limites) de la suite (u_n) .
- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < u_n$.
- Justifier que la suite (u_n) converge.
- Soit ℓ la limite de la suite. On admet que $\ell = \frac{1}{3}\ell + 2$. Déterminer la valeur de ℓ .

7 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 2x$.

- Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .
- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.
- En déduire que (u_n) est convergente vers un réel ℓ .
- En utilisant le théorème du point fixe, déterminer la valeur de ℓ .

8 Même énoncé pour la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2 + 3u_n}{4 + u_n}$. On montrera que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} < u_n \leq 3$.

9 Démontrer le théorème des suites adjacentes.

10 Suites adjacentes

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

- Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On appelle ℓ leur limite commune.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit pour tout réel $x \in [0; 1]$ la fonction f par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$$

- Que vaut $f(0)$?
- Montrer que $f(1) = \frac{u_n}{e}$

(c) Montrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$,

$$f'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

(d) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0; 1]$.

(e) En déduire que $u_n \leq e$

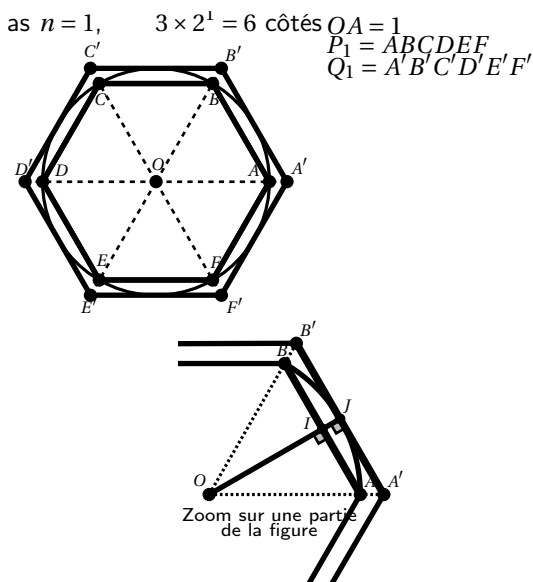
3. On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = f(x) + \frac{x}{n!}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

(a) Dresser le tableau de variations de g

(b) En déduire que $u_n \geq e - \frac{e}{n!}$

4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

11 Méthode d'Archimède : approximation de π Soit \mathcal{C} un cercle de rayon 1, on construit, pour $n \geq 1$, deux polygones réguliers P_n et Q_n ayant 3×2^n côtés. P_n étant inscrit dans le cercle et Q_n exinscrit (côtés tangents au cercle).



On admet que le périmètre du cercle est 2π et qu'il est encadré par les périmètres des deux polygones. On note p_n et q_n les **demi-périmètres** des polygones P_n et Q_n . De cette façon, on a :

$$p_n \leq \pi \leq q_n$$

1. **Cas $n = 1$**

Montrer que $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$

2. **Expression de p_n et q_n**

(a) Justifier que l'angle au centre qui intercepte l'un des côtés de P_n et de Q_n est de $\frac{2\pi}{3 \times 2^n}$.

(b) En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$p_n = 3 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \text{ et } q_n = 3 \times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$$

3. **Relations de récurrence ****

(a) On pose $\alpha = \frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}$. Exprimer p_n et q_n en fonction de n et α

(b) Exprimer $\sin(2\alpha)$ et $1 + \cos(2\alpha)$ en fonction de $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} \right) \text{ et } p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}$$

(d) Utiliser les relations précédentes pour déterminer p_2 et q_2 .

4. **Étude des suites (p_n) et (q_n)**

(a) Soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$. Démontrer que

$$a < \sqrt{ab} < b \quad \text{et} \quad a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b$$

(b) En utilisant une récurrence, démontrer que pour tout $n \geq 1$, $p_n < q_n$.

(c) En déduire que la suite (p_n) est croissante et que (q_n) est décroissante.

(d) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$q_{n+1} - p_{n+1} \leq \frac{1}{2}(q_n - p_n)$$

(e) En déduire que $q_n - p_n \leq \frac{1}{2^n}$

5. Démontrer que les suites (p_n) et (q_n) sont convergentes vers la même limite.

12 V/F (u_n) et (v_n) sont deux suites numériques

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

2. Si la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0, alors l'une des suites (u_n) ou (v_n) converge vers 0.

3. Si (u_n) converge, alors (u_n^2) converge

4. Si (u_n^2) converge, alors (u_n) converge

5. Si (u_n) est croissante, alors (u_n) admet une limite

6. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n^2}{u_n} = +\infty$.

7. On définit les suites (s_n) et (t_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $s_n = u_n + v_n$ et $t_n = u_n - v_n$.

Si (s_n) et (t_n) convergent alors (u_n) et (v_n) convergent.

13 Suite arithmético-géométrique et application (*)

1. a est un nombre réel. On considère la suite (u_n) définie par pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} u_n \end{cases}$.

(a) (v_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = 13u_n - 4$

Démontrer que (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n et a .

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13} \right) \left(-\frac{3}{10} \right)^{n-1}$$

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2. Un professeur oublie souvent ses clés de salle.
 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement :
 « le professeur oublie ses clés le jour n » et $\overline{E_n}$ l'événement contraire.
 p_n est la probabilité de E_n . On note $p_1 = a$, la probabilité qu'il oublie ses clés le premier jour.
 On suppose en outre que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le jour n il a oublié ses clés, alors la probabilité qu'il les oublie le jour suivant est de $\frac{1}{10}$
- S'il ne les oublie pas le jour n , la probabilité qu'il les oublie le jour suivant est $\frac{4}{10}$.

- (a) Démontrer que $p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}(1-p_n)$.
 (b) En déduire une expression de p_{n+1} en fonction de p_n .
 (c) À l'aide des résultats de la question 1., donner l'expression de p_n en fonction de n et de a .
 (d) La limite de (p_n) dépend-elle de la condition initiale a ?

14 Raisonnement par analyse-synthèse

La suite numérique u admet pour premier terme u_0 et est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

1. Étudier le cas où $u_0 = 4$.
2. Si $u_0 \neq 4$, montrer qu'il existe une suite géométrique v telle que $u - v$ soit indépendante de n .
 Exprimer u_n en fonction de n et u_0 .
 En déduire que (u_n) admet une limite finie et déterminer cette limite.

15 Suite d'entiers et suite stationnaire **

On considère une suite (q_n) d'entiers naturels **croissante**, dont le premier terme q_0 est supérieur ou égal à 2. On construit la suite (u_n) de la façon suivante :

$$u_0 = \frac{1}{q_0}$$

$$u_1 = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1}$$

$$\dots + \frac{1}{q_0 \dots q_{n-1}}$$

$$u_n = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \dots + \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et peut-être majorée par une suite convergente. En déduire que la suite (u_n) admet une limite qui appartient à l'intervalle $]0; 1]$.
2. Montrer que si la suite (q_n) est stationnaire à partir d'un certain rang (i.e. s'il existe un k tel que pour tout $n \geq k$, $q_n = q_k$) alors la suite (u_n) converge vers un nombre rationnel.

16 Étude de suite homographique

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Étudier la suite (u_n) (variations, limite, ...)
2. En utilisant la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$, et en prouvant qu'elle est géométrique, en déduire une expression de (u_n) en fonction de n .

17 On définit la suite réelle (u_n) par $u_0 = 0$, $u_1 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = pu_{n+1} - (p-1)u_n$, où $p \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1, 2\}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. (a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1} - u_n$; montrer que (w_n) est une suite géométrique et calculer w_n en fonction de n , p et a .
 (b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_{n+1} - (p-1)u_n$; montrer que (t_n) est une suite constante et calculer t_n en fonction de a .
 (c) Exprimer u_n en fonction de w_n et t_n , en déduire une expression en fonction de n , p et a .
2. On définit une suite (v_n) par :

$$v_0 = 1, \quad v_1 = e^a$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{(v_{n+1})^p}{(v_n)^{p-1}}$$

- (a) Justifier la définition de la suite (v_n) en montrant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.
- (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(v_n) = u_n$
- (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n , p et a .
- (d) En déduire la limite de (v_n) en fonction de p et a quand n tend vers $+\infty$.

18 analyse-synthèse

On se propose de trouver une suite réelle u vérifiant $u_0 = 1$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{-7u_n - 8}{2u_n + 1}$.

1. On suppose que u existe.
 - (a) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \neq -2$.
 - (b) Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ est une suite arithmétique. En déduire une expression de v_n en fonction de n .
 - (c) Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On note $u_n = f(n)$.
 - (a) Montrer que la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les conditions imposées à u .
 - (b) Conclure et trouver la limite de u .
3. Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que u_n soit un nombre entier relatif.

19 moyennes et suites adjacentes

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1. On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.

- (a) Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.
- (b) Déterminer la limite de la suite w .
2. (a) Montrer que la suite u est croissante et que la suite v est décroissante.
- (b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.
3. Montrer que les suites u et v convergent. Montrer qu'elles ont alors même limite que l'on appellera ℓ .
4. On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par : $t_n = 3u_n + 8v_n$
- (a) Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.
- (b) Déterminer la valeur de ℓ .

20 somme et suite géométrique

Trouver un nombre rationnel dont le développement décimal illimité est 3,1414141414...

21 Soit (a_n) la suite définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$a_1 = \frac{3}{2} \text{ et } a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n}.$$

- Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > 1$.
- Montrer que la suite a n'est pas majorée.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $a_{k+1} \leq a_n$ alors $a_{k+2} \geq a_{k+1}$.
- Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} \leq a_n \leq \sqrt{n} + 1$$

- Trouver un entier k tel que $2024 \leq a_k \leq 2025$

22 Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{3^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{3^n}\right)$$

- Calculer u_0 , u_1 et u_2 sous forme fractionnaire simplifiée.
- Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , tel que $\ell \in \left[2; e^{\frac{3}{2}}\right]$.
- Pour tout n dans \mathbb{N} , on pose $v_n = \ell - u_n$ et $s_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

On se propose dans cette question de démontrer que la suite (s_n) converge.

- (a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{3^k}\right) = \ln(\ell)$$

- (b) Montrer que, pour tout p dans \mathbb{N} fixé, on a

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_p}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=p+1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{3^k}\right)$$

- (c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question **3a.**, que

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_p}\right) \leq \frac{1}{2 \times 3^p}$$

- (d) Dédire de la question précédente que $\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_p \leq \ell \left(1 - e^{-\frac{1}{2 \times 3^p}}\right)$

- (e) Justifier que, pour tout réel x , on a $1 - e^{-x} \leq x$ et en déduire que $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{\ell}{2} \times \frac{1}{3^p}$$

- (f) En déduire la convergence de la suite (s_n) .

Feuille de TD n°9

Réponses ou Solutions

1 $10^4, 10^8, \frac{1}{\varepsilon^2}$

4 $+\infty, -\infty, +\infty, 0$

```
def seuil(S):
    u=1
    n=0
    while u<=S:
        u=u*1.2
        n=n+1
    return n

>>> seuil(2)
4

>>> seuil(1000)
38
```

5

6 Récurrence facile, soit en utilisant la croissance de la fonction affine $x \mapsto \frac{1}{3}x+2$, soit en fabriquant les termes suivants par des opérations élémentaires. Limite $\ell = 3$.

8 $f'(x) = \frac{10}{(4+x)^2} > 0$, donc f est croissante sur $[0; 3]$

Si $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$ alors $f(0) = \frac{1}{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq f(3) = \frac{11}{7} \leq 2 \leq 3$

$\ell = f(\ell) \iff \ell$ vérifie $x^2 + x - 2 = 0 \iff \ell = 1$ ou $\ell = 2$, or $\ell < \frac{11}{7} < 2$, donc $\underline{\underline{\ell = 1}}$.

10

1. (u_n) est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. Et (v_n) décroissante car $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}$.
De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$. Donc les suites sont adjacentes, et donc convergentes par théorème.

2. (a) $f(0) = 1$

(b) $f(1) = u_n e^{-1} = \frac{u_n}{e}$

(c) $f'(x) = e^{-x} \left(0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \dots + \frac{nx^{n-1}}{n!} \right) - e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x} < 0$ sur $[0; 1]$

(d) Donc

x	0	1
f	1	$\frac{u_n}{e}$

(e) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_n}{e} \leq 1 \iff \underline{u_n \leq e}$.

3. (a) $g'(x) = f'(x) + \frac{1}{n!} = -\frac{x^n}{n!} e^{-x} + \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!} (1 - x^n e^{-x})$

Or, $\forall x \in [0; 1]$, $x^n \in [0; 1]$ et $e^{-x} \leq 1$, donc $\forall x \in [0; 1]$, $(1 - x^n e^{-x}) \geq 0$ ainsi,

x	0	1
$g'(x)$		+
g	1	$\frac{u_n}{e} + \frac{1}{n!}$

(b) Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_n}{e} + \frac{1}{n!} \geq 1 \iff u_n \geq e - \frac{e}{n!}$

4. Ainsi, d'après les questions précédentes, pour tout $n \geq 1$, $e - \frac{e}{n!} \leq u_n \leq e$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim u_n = e$