▶ Exercice 1 /4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $3z+1-2\mathrm{i}=4-3\mathrm{i}-2\mathrm{i}z$
2. $\overline{z}=\mathrm{i}z$
3. $\overline{z}-1=z\overline{z}-\mathrm{i}$
4. $z^2=z-1$

▶ Exercice 2 /4

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 \in]0;1[\\ u_{n+1}=u_n(2-u_n) \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x)=x(2-x)$ est croissante sur $[0;1]$.
2. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0<u_n<1$
3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

▶ Exercice 3 /3

Dire si les affirmation suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse.

1. Si z est solution de l'équation $(E)\quad z^2+iz+1=0$, alors $\overline{z}$ est solution de (E).
2. Soit z un nombre complexe, $z^2+\overline{z}^2+z\overline{z}$ est un nombre réel.
3. L'équation $z^3+z^2+1-\mathrm{i}=0$ admet une solution réelle.

▶ Exercice 4 /2

Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que :

$$\begin{cases} z_1+z_2 = 3 \\ z_1 \times z_2 = 5 \end{cases}$$

▶ Exercice 5 /3

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^3-(2+\mathrm{i}\sqrt{2})z^2+2(1+\mathrm{i}\sqrt{2})z-2\mathrm{i}\sqrt{2}$.

1. Montrer que le nombre $z_0=\mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z)=0$.
2. Factoriser le polynôme P
3. En déduire les solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$.

▶ Exercice 6 /5

On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe différent de -1, associe $f(z)=\dfrac{iz}{z+1}$

1. Soit $z_1=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$. Donner l'expression algébrique de $f(z_1)$.
2. Déterminer les solutions de l'équation $f(z)=z$.
3. On pose $z=x+\mathrm{i}y$, avec x et y réels tels que $(x,y)\neq(-1,0)$.
   (a) Vérifier que la partie imaginaire de $f(z)$ est : $\mathrm{Im}\big(f(z)\big)=\dfrac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tels que $f(z)\in\mathbb{R}$.
   (c) Interpréter cet ensemble en terme géométrique, si (x,y) correspondent aux coordonnées d'un point.