Le 19/04/2023	DS n° 8	CPES – SG
Prénom	Nom	Série générale

Exercice 1 /4,5

On considère la suite (w_n) définie par : $w_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = \frac{1+3w_n}{3+w_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $w_n > 1$.

2. (a) Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $w_{n+1} - w_n = \dfrac{(1-w_n)(1+w_n)}{3+w_n}$.

(b) Démontrer que suite (w_n) est décroissante.
En déduire que la suite (w_n) converge.

(c) En utilisant le théorème du point fixe, déterminer la valeur de la limite.

Exercice 2 /6

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère le programme Python suivant :

```python
def u(n):
    u=2
    for k in range(n):
        u=(1+0.5*u)/(0.5+u)
    return u
```

Compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner "à la main" ce programme pour $n = 1,2$ puis 3. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

n	1	2	3
u			

2. En tapant la commande suivante :

```python
for i in range(4,12):
    print(u(i))
```

on obtient l'affichage :

```
1.0082644628099173
0.9972602739726026
1.000914913083257
0.9996952148735141
1.0001016156894624
0.9999661303979678
1.000011290122272
0.999996236654235
```

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

(b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 /6,5

On considère les suites mêlées (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 24$, $v_0 = 6$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n \times v_n} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big(u_n > 0$ et $v_n > 0\big)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant v_n$.
4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 /3

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ c'est-à-dire

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout entier k non nul.
2. En déduire que $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.