Correction DS n°8 série Générale

Exercice 1 : $w_0 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \dfrac{1+3w_n}{3+w_n}$

1°) Soit P_n : « $w_n > 1$ »

- Init : $w_0 = 2 > 1$ donc P_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie

  Soit $f : x \mapsto \dfrac{1+3x}{3+x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{3(3+x) - 1\times(1+3x)}{(3+x)^2} = \dfrac{8}{(3+x)^2} > 0$

  Donc f est croissante sur $]-3;+\infty[$

  D'après P_n, $w_n > 1$

  $f(w_n) > f(1)$ car f est croissante sur $]1;+\infty[$

  $w_{n+1} > 1$ Donc P_{n+1} est vraie
- Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n > 1$

2°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1+3w_n}{3+w_n} - w_n = \dfrac{1+3w_n - 3w_n - w_n^2}{3+w_n}$

$w_{n+1} - w_n = \dfrac{1-w_n^2}{3+w_n} = \dfrac{(1-w_n)(1+w_n)}{3+w_n}$

2°) b) Ainsi comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 1$, on a

$1 - w_n < 0$, $1 + w_n > 2 > 0$ et $3 + w_n > 4 > 0$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n < 0$

Donc (w_n) est décroissante et minorée par 1

Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone,

(w_n) converge vers $l \geq 1$

2c) Comme f est continue sur $]-3;+\infty[$, elle est continue en l et l est donc solution de l'équation $f(x) = x$

$x > -3$

$$\frac{1+3x}{3+x} = x \iff 1+3x = x(x+3) \iff x^2 - 1 = 0$$
$$\iff x = 1 \text{ ou } x = -1$$
$$\text{or } l \geq 1$$

Ainsi $l = 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

Exercice 2. Soit (u_n) telle que $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2} + u_n}$

1°)

```python
def u(n):
    u=2
    for k in range(n):
        u=(1+0.5*u)/(0.5+u)
    return u
```

n	1	2	3
u	$\frac{2}{2,5} = 0,8$	$\frac{1,4}{1,3} = \frac{14}{13}$	$\frac{40}{41}$

$\frac{1}{2} + \frac{14}{13} = \frac{41}{26}$

2°) (u_n) semble non monotone et convergente vers 1.

3°) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

3a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{1 + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2} + u_n} - 1}{\dfrac{1 + \frac{1}{2}u_n}{1/2 + u_n} + 1}$ $\times\left(\frac{1}{2} + u_n\right)$ $\times\left(\frac{1}{2} + u_n\right)$

donc $v_{n+1} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} - u_n}{1 + \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} + u_n} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u_n}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}u_n} = \dfrac{1 - u_n}{3(1+u_n)} = \dfrac{-1}{3} v_n$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$ et (v_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{3}$

3b) $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{1}{3}$ Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

4a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| = \frac{1}{3^{n+1}}$ donc $|v_n| \leq \frac{1}{3}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 1$

4b) $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} \iff v_n \times (u_n + 1) = u_n - 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\iff u_n v_n + v_n = u_n - 1$$
$$\iff u_n v_n - u_n = -1 - v_n$$
$$\iff u_n (v_n - 1) = -1 - v_n$$
$$\iff u_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 1} = \frac{v_n + 1}{1 - v_n}$$

On a $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ car $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ donc par opérations sur les limites, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice 3 $u_0 = 24$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n \times v_n} \end{cases}$

$v_0 = 6$

1°) $u_1 = 15$ $u_2 = 13{,}5$

$v_1 = \sqrt{24 \times 6} = \sqrt{6 \times 4 \times 6} = 12$ $v_2 = \sqrt{12 \times 15} = 2 \times 3\sqrt{5} \simeq 13{,}42$

2°) Soit P_n : « $u_n > 0$ et $v_n > 0$ »

- u_0 et v_0 sont positifs donc P_0 est vraie
- Si $v_n > 0$ et $u_n > 0$ alors $\frac{u_n + v_n}{2} > 0$ donc $u_{n+1} > 0$

$\sqrt{u_n v_n} > 0$ donc $v_{n+1} > 0$ donc P_n est héréditaire

- La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc d'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$ et $v_n > 0$

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \frac{u_n - 2\sqrt{u_n v_n} + v_n}{2}$

$= \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geq 0$

de plus, $u_0 = 24 \geq v_0$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \geq 0$ soit $u_n \geq v_n$

4°) • Montrons que (u_n) est décroissante :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0$

donc (u_n) décroissante

• Montrons que (v_n) est croissante :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n \times v_n} - v_n = \sqrt{v_n} \times \left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)$

comme $u_n \geq v_n$ alors par croissance de la fonction racine, $\sqrt{u_n} \geq \sqrt{v_n}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - v_n \geq 0$ donc (v_n) croissante

• $u_{n+1}-v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n}$ Comme $\forall n,\ u_n \geqslant v_n$

alors $\sqrt{v_n v_n} \leq \sqrt{u_n v_n} \leq \sqrt{u_n u_n}$

donc $-u_n \leq -\sqrt{u_n v_n} \leq -v_n$

donc

(**) $$u_{n+1}-v_{n+1} \leqslant \frac{u_n+v_n}{2} - v_n$$

$$u_{n+1}-v_{n+1} \leqslant \frac{u_n-v_n}{2}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}-v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}(u_0-v_0)$

$u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(u_0-v_0)$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0}$

5°) Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et donc, par théorème, convergent vers la même limite.

Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de 24 et 6

Exercice 4 $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

1°) $$2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \frac{2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$= \frac{2(k+1-k)}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leqslant \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

2°) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

d'après la question précédente, $u_n \geqslant 2(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1}) + 2(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}) + \cancel{\sqrt{3}} \dots + \cancel{\sqrt{n}}\ 2(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$

donc $\boxed{u_n \geqslant 2\sqrt{n+1}-2}$

3°) D'après le théorème de comparaison de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$