

Correction DS n°8 - Serie technologique

Exercice 1

$$f'(x) = \frac{(3+x) \times 3 - 1 \times (1+3x)}{(3+x)^2} = \frac{2}{(3+x)^2}$$

$$g'(x) = 3 \times e^{-x} + (3x-4) \times (-e^{-x}) = (-3x+7)e^{-x}$$

$$h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Exercice 2

$$u_n = n^2 - 2n. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ est une FI de type } \infty - \infty$$

$$u_n = n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right) \text{ donc par produit, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$v_n = \frac{3-4n}{2n+7} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \text{ est une FI } \frac{\infty}{\infty}$$

$$v_n = \frac{n(-4 + \frac{3}{n})}{n(2 + \frac{7}{n})} = \frac{-4 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{7}{n}} \text{ donc par quotient,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{-4}{2} = -2$$

$$w_n = \frac{4 - 0,8^n}{1,3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0 \text{ car } |0,8| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,3^n = +\infty \text{ car } 1,3 > 1$$

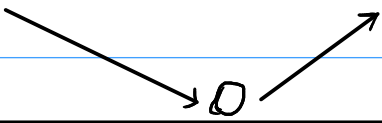
$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$$

Exercice 3 $M_0 = 5$ $u_{n+1} = \frac{1}{10} (u_n + 1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1°) $f: x \mapsto \frac{1}{10} (x+1)^2$

$$f'(x) = \frac{1}{10} \times 2 \times 1 \times (x+1) = \frac{2}{10} \times (x+1)$$

donc

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$			

2°) Soit $P_n: \hat{=} 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$

• Initi:

$$u_1 = \frac{1}{10} (u_0 + 1)^2 = \frac{1}{10} \times 6^2 = 3,6$$

donc $0 \leq u_1 \leq u_0$ donc P_0 vraie

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie.

donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ $\searrow$ f croissante sur $[0, +\infty[$

$$\text{donc } f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

$$\text{donc } 0 \leq \frac{1}{10} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

donc P_{n+1} est vraie

• Ainsi, P_n est vraie au rang 0 et est héréditaire
donc par le principe de récurrence, P_n est vraie
par tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$

3. D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente vers $l \geq 0$

$$4^o) \quad l = \frac{1}{10} (l+1)^2 \Leftrightarrow 10l = l^2 + 2l + 1$$

$$\Leftrightarrow l^2 - 8l + 1 = 0$$

$$\Delta = 64 - 4 = 60$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} \text{ ou } l = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{2}$$

$$\Leftrightarrow l = 4 - \sqrt{15} \text{ ou } l = 4 + \sqrt{15}$$

or (u_n) est décroissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0$
 $u_n \leq 5$
donc $l \neq 4 + \sqrt{15}$

Ainsi $l = 4 - \sqrt{15}$

Exercice 4

1-a) en 2021 : $u_1 = 500 \times 0,7 + 300 = 650$ élèves.

b) en 2022 : $u_2 = 650 \times 0,7 + 300 = 755$ élèves.

c) $\begin{cases} u_1 - u_0 = 150 \\ u_2 - u_1 = 105 \end{cases}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

$$\left. \begin{array}{l} \frac{u_1}{u_0} = \frac{650}{500} \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{755}{650} \end{array} \right\} \text{ donc } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}$$

$= 1,3 \qquad \approx 1,16$

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \underbrace{0,7}_{\substack{\uparrow \\ 30\% \text{ de moins par an}}} u_n + 300 \leftarrow \begin{array}{l} \text{nb d'élèves en plus} \\ \text{chaque année.} \end{array}$$

3°) Seul l'algo 2 est correct.

Avec Algo 1, on affiche $u_0 \rightarrow u_{n-1}$

Avec Algo 3, seulement u_n est affiché.

4°) (v_n) définie par $v_n = u_n - 1000$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$

$$= 0,7 u_n + 300 - 1000$$

$$= 0,7 v_n - 700$$

$$= 0,7 (u_n - 1000)$$

$$v_{n+1} = 0,7 v_n$$

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison 0,7

$$v_0 = u_0 - 1000 = 500 - 1000 = -500$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = -500 \times 0,7^n$$

4b) Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 1000$

$$u_n = 1000 - 500 \times 0,7^n$$

5°) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1000$ car $|0,7| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,7^n = 0$

La capacité de 900 devra être donc suffisante.