Chapitre 10 : Nombres Complexes (II)
Le retour

Table des matières

1 Représentation géométrique des nombres complexes

1.1 Affixe d'un point du plan

Définition 1 (Interprétation géométrique).

Dans le plan, on peut associer chaque point $M(x; y)$ au nombre complexe $z = x + iy$. Si on dit que le couple $(x; y)$ constitue les coordonnées de M, on dit que le nombre z est *l'affixe* du point M, on note $M(z)$ et que M est le *point image* de z.

Remarque 1.

Les vecteurs de base du plan, lors d'une identification avec $\mathbb{C}$ sont notés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (notamment pour éviter la confusion avec la notation i de $\sqrt{-1}$). On parle donc de *plan complexe* muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Propriété 1 (milieu d'un segment).

Si $M(z)$ et $M'(z')$, alors le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $I\left(\dfrac{z+z'}{2}\right)$.

▶ Exercice 1

Soit M d'affixe $z \in \mathbb{C}$. Quelle est la position de M' d'affixe $\overline{z}$, le conjugué de z ?

1.2 Affixe d'un vecteur

Définition 2 (Du point au vecteur).

À tout nombre complexe $z = x + iy$ (x et y réels), on associe le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le plan complexe. Comme pour les points, $\vec{w}$ est appelé *vecteur image* de z et z est l'*affixe* de $\vec{w}$. On note $\vec{w}(z)$.

Propriété 2 (calcul des coordonnées d'un vecteur).

- Si $A(a)$ et $B(b)$, alors $\overrightarrow{AB}(b-a)$.
- La relation est linéaire : Si $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ ont pour affixes respectives z et z' alors $\vec{w}+\vec{w}'(z+z')$ et $\lambda\vec{w}(\lambda z)$.

On pourra donc interpréter géométriquement toutes les opérations sur les nombres complexes (additions, soustraction, conjugaison pour le moment), mais il faudra attendre la seconde partie sur les nombres complexes pour les multiplications et la généralisation des quotients.

▶ Exercice 2 **Recherche de lieux de points**

Déterminer l'ensemble des points du plan M d'affixe z tels que $\dfrac{\mathrm{i}z-3}{z-3\mathrm{i}}$ est un réel.
Même question avec $\dfrac{\mathrm{i}z-3}{z-3\mathrm{i}}$ est un imaginaire pur.

1.3 Module d'un nombre complexe

On rappelle que si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+$

Définition 3 (Module).

Le *module* d'un nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ est le nombre $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$.

On a donc, si $z = a + ib$ est l'écriture algébrique, alors $|z|^2 = a^2 + b^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.
Le **module** de z correspond à la **norme** du vecteur image $\vec{w}(z)$.

Remarque 2 (Distance entre deux points).

Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points du plan complexe $(O;\vec{u};\vec{v})$ et leurs affixes respectives. Alors $AB = |b-a| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

▶ Exercice 3 Application

Représenter l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que

1. $|z-1| = |z-2\mathrm{i}|$
2. $|z-3-2\mathrm{i}| \leqslant 2$

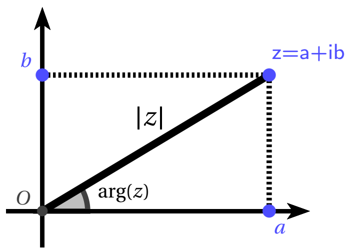
2 Écriture trigonométrique d'un nombre complexe

2.1 Module et argument

Définition 4 (Module et argument).

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, soit z un nombre complexe et M le point d'affixe z.

- On appelle *module de z* la distance OM et on le note $|z|$.
- On appelle *argument de z* <u>une</u> mesure de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$ et on le note $\arg(z)$.
- ⚠le nombre 0 n'a pas d'argument et un module nul.



On remarque que si $z = a+\mathrm{i}b$, alors $z\overline{z} = (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2+b^2 \in \mathbb{R}_+$, donc, grâce au théorème de Pythagore,

Propriété 3 (Expression du module d'un nombre complexe).

Le *module* d'un nombre complexe $z = a+\mathrm{i}b$ est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$.

On a donc, si $z = a+\mathrm{i}b$ est l'écriture algébrique, alors $|z|^2 = z\overline{z} = a^2+b^2 = \mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2$.

Le **module** de z correspond à la **norme** du vecteur image $\vec{w}(z)$.

2.1.1 Propriétés du module

Propriété 4 (Module et conjugué).

$|\overline{z}| = |z|$

Propriété 5 (Module et opérations).

- Produit : $|zz'| = |z||z'|$.
- Puissances : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$
- Inverse : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- Quotient : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Propriété 6 (Inégalité triangulaire).

$\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

2.1.2 Propriété de l'argument

Remarque 3 (Notation argument).

$\arg(z)$ est défini à $2k\pi$ près. On note donc $\arg(z) \equiv \theta \ [2\pi]$.

Propriété 7 (Propriétés de l'argument).

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}^*$,

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \ [2\pi]$: *L'argument de l'opposé est* ....
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \ [2\pi]$: *L'argument du conjugué est* ....
- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$: *L'argument du produit est* .... *tiens, tiens...*
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\arg\left(z^n\right) = n\arg(z) \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \ [2\pi]$: *L'argument de l'inverse est* ....
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$: *L'argument du quotient est* ....

Remarque 4.

$\boxed{z = 0 \Longleftrightarrow |z| = 0}$ mais 0 n'a pas d'argument.

■ **Exemple 1:**
Quelques arguments de référence :

- $\arg(\mathrm{i}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$.
- Un nombre réel strictement positif : $\forall x \in]0; +\infty[$, $\arg(x) \equiv 0 \ [2\pi]$.

- Un nombre réel strictement négatif : $\forall x \in]-\infty; 0[$, $\arg(x) \equiv \pi \ [2\pi]$.

Ainsi,

l'argument d'un nombre réel non nul est $0 \ [\pi]$ (0 ou π suivant son signe)
L'argument d'un imaginaire pur non nul est $\dfrac{\pi}{2} \ [\pi]$

▶ Exercice 4

Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que

1. $|z| = 3$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$

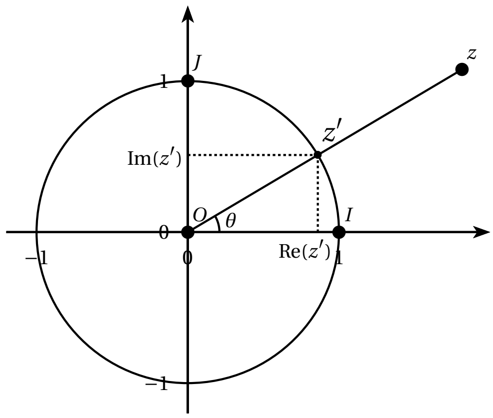
2.2 Détermination du module et de l'argument

On sait déjà que si $z = a + ib$, $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propriété 8.

Si $z = a + ib$, a et b étant deux réels, si $\theta = \arg(z)$, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$



▶ Exercice 5 Résultats à connaître quasiment par cœur

Déterminer le module et l'argument des deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + \mathrm{i} \qquad z_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$$

2.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

D'après les formules de calcul du module et de l'argument, un nombre complexe est défini de façon unique par son module et son argument

Définition 5 (Forme trigonométrique).

Soit $z \in \mathbb{C}$, si on pose $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, alors

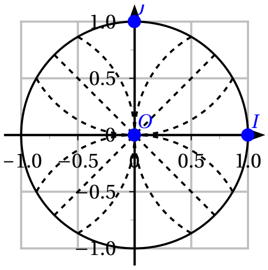
$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

Cette écriture s'appelle *forme trigonométrique du complexe z.*

■ **Exemple 2:**

Soit $z = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$. $r = |z| = \sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$.

Ainsi, en factorisant par r, $z = 4\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et on cherche θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$:



On a donc $\theta = \ldots\ldots$

Et l'écriture trigonométrique de z est :

$z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarque 5.

Attention, si $z = -2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$, alors cette écriture n'est pas l'écriture trigonométrique de z ! Pourquoi ?

► Exercice 6

Pour chacun des nombres complexes suivants, dire s'il est sous forme trigonométrique et déterminer, si c'est le cas, son module et son argument.

1. $z_1 = 5\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
2. $z_2 = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
3. $z_3 = \cos\dfrac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}$
4. $z_4 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$
5. $z_5 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$
6. $z_6 = 3\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}$
7. $z_7 = \dfrac{3}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
8. $z_8 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

3 Forme exponentielle

3.1 Exponentielle d'un imaginaire pur

Si on pose, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$, calculons $f(\theta + \theta')$:

Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition 6 ($e^{i\theta}$).

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit l'exponentielle de l'imaginaire pur $i\theta$:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

■ **Exemple 3:**

$e^{i\frac{\pi}{6}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

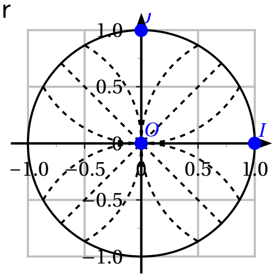
Remarque 6.

$$\boxed{\forall\theta \in \mathbb{R}, \quad |e^{i\theta}| = \ldots}$$

Ce sont tous les nombres complexes appartenant au cercle trigonométrique qui s'écrivent de la sorte !

Placer sur la figure ci-contre les points ayant pour affixes les nombres complexes suivants :

- $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$
- $z_2 = e^{i\pi}$
- $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$
- $z_4 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- $z_5 = e^{2i\pi}$



▶ **Exercice 7** **Racines troisièmes de l'unité**

1. Démontrer que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$.
2. En déduire l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^3 = 1$.
3. Quelles relations existe-t-il entre les deux racines complexes de cette équation ?
4. Donner l'écriture exponentielle de ces trois racines. Les placer dans le plan complexe.

3.2 Écriture exponentielle d'un nombre complexe

Définition 7 (Écriture exponentielle).

Si $z \in \mathbb{C}^*$, de module $r \in]0; +\infty[$ et d'argument $\theta \in \mathbb{R}$, alors $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \boxed{re^{i\theta}}$.
Cette dernière écriture est appelée *écriture exponentielle du complexe z*.
Réciproquement, si $z = ae^{ib}$, avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, alors z est le nombre complexe de module a et d'argument congru à b modulo 2π.

3.3 Calculer avec la forme exponentielle

La forme exponentielle permet des calculs assez naturels, en respectant la propriété de la fonction exp :

Propriété 9.

Pour tous les réels θ et θ',

1. $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. Formule de « De Moivre » :
$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$
Qui se formule aussi de la façon suivante :
$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

▶ Exercice 8

On pose $z_1 = -\sqrt{3} + i$. Donner la forme exponentielle des nombres complexes $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} z_1^2$ et $z_3 = \dfrac{2z_1}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}$.

▶ Exercice 9

1. Déterminer le module et l'argument du nombre $Z = 2\left(\sqrt{3} - i\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^2$
2. Déterminer la forme algébrique de $\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$

▶ Exercice 10 **Formules de trigonométrie**

Retrouver les formules d'addition des sinus et cosinus en utilisant l'écriture $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

4 Applications à la géométrie

4.1 Considérations générales

On rappelle que si $M(z)$ dans le repère du plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$, alors $\arg(z) = \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right)$ $[2\pi]$

Propriété 10.

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives z et z'. Alors le complexe $\dfrac{z'}{z}$ a pour module le quotient $\dfrac{|z'|}{|z|}$ et pour argument l'angle $\left(\vec{a}; \vec{b}\right)$.

<u>Démonstration</u>

On a $z = re^{i\theta}$, $z' = r'e^{i\theta'}$ et $\dfrac{z'}{z} = r"e^{i\theta"}$.

Alors $z' = \dfrac{z'}{z}z \Longleftrightarrow r'e^{i\theta'} = r"e^{i\theta"} \times re^{i\theta} = rr"e^{i(\theta+\theta")}$ et, par unicité de l'écriture,

$$\left\{\begin{array}{rcl} r' &=& rr" \\ \theta' &=& \theta+\theta" \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} r" &=& r'/r \\ \theta" &=& \theta'-\theta \end{array}\right.$$

et $\theta'-\theta$ est bien une mesure de $\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

□

Propriété 11.

Si A, B, C et D sont quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D, alors le complexe $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ a pour module le nombre $\dfrac{CD}{AB}$ et pour argument l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$.

4.2 En pratique !

Conséquence 1.

Avec les mêmes notations que la propriété précédente :

1. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ est réel.
2. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ est imaginaire pur.
3. $AB = CD$ si et seulement si $\left|\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right| = 1$

⚠On utilisera toujours les déterminations des modules et arguments pour justifier le parallélisme, alignement ou perpendicularité. Jamais brutalement en appliquant cette propriété, mais elle est là pour vous faire comprendre le lien entre les complexes et la géométrie.

Toujours étudier le quotient $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$!

▶ Exercice 11

A, B, C trois points d'affixes respectives : $z_A = 2i$, $z_B = 2+i$, $z_C = 1-i$. Démontrer que le triangle ABC est isocèle rectangle en B.

▶ Exercice 12

Pour tout $z \neq 2-i$, on considère $z' = \dfrac{z-i}{z-2+i}$.

On appelle (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un réel.

1. Déterminer l'ensemble (E) en utilisant l'expression algébrique de z'
2. Déterminer l'ensemble (E) en utilisant un argument de z'.

▶ Exercice 13

Même exercice si $z \neq -1$ et $z' = \dfrac{z-1-2i}{z+1}$.

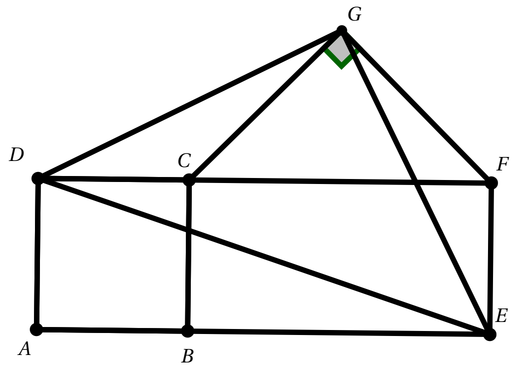
(E) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un réel et (G) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un imaginaire pur.

► Exercice 14

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré et $BEFC$ un rectangle tel que $BE = 2AB$. Le triangle CGF est rectangle en G.

Démontrer que le triangle DGE est rectangle isocèle en G.

Indication : Poser un repère complexe.



► Exercice 15 **Le pentagone régulier**

On considère le nombre complexe $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ et l'équation (E) : $z^5 = 1$.

1. (a) Si z est solution de E, quelle est la valeur de son module $|z|$.
   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n, ω^n est solution de (E).
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, comparer z^{n+5} et z^n.
2. (a) Démontrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, on a :
   $$z^5 - 1 = (z-1)\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4\right)$$
   (b) En déduire la valeur de $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$
3. On pose $u = \omega + \overline{\omega}$ et $v = \omega^2 + \overline{\omega^2}$
   (a) Montrer que $u + v = -1$ et que $uv = -1$.
   (b) En utilisant un polynôme de degré 2, déterminer les valeurs de u et v puis en déduire que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
4. Le plan complexe est muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$. On appelle Ω_0 le point d'affixe 1, J le point d'affixe i et M le point d'affixe $-\dfrac{1}{2}$.
   (a) Placer les points Ω_0, J et M dans le repère.
   (b) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre M et passant par J.
   On appelle N l'intersection du cercle avec la demi-droite $[O\Omega_0)$.
   (c) Construire à la règle et au compas les points Ω_1, Ω_2, Ω_3 et Ω_4 d'affixes respectives ω, ω^2, ω^3 et ω^4, puis tracer le pentagone régulier $\left(\Omega_0\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4\right)$.