Chapitre 9 : Intégrales et primitives

Table des matières

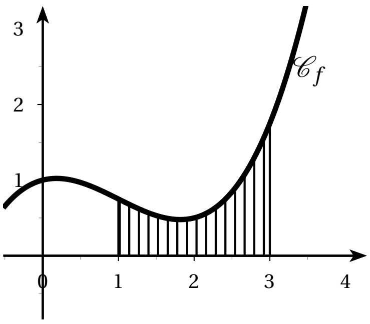
1 Intégrale d'une fonction continue positive sur un segment

1.1 Définition

Définition 1 (Intégrale d'une fonction positive).

Étant donnée une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On appelle *intégrale de f sur $[a;b]$* la mesure de l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

On note cette aire : $I = \int_a^b f(x)dx$. Elle est mesurée en unité d'aires du repère.



NOTATION :
Le symbole $\int$ est un S déformé, qui se lit « intégrale » ou « somme » (c'est une somme des tout petits rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur dx).

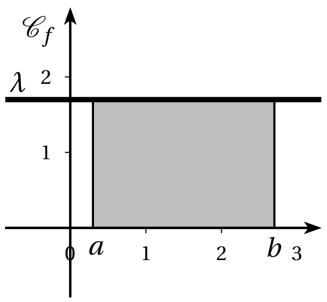
Remarque 1.

La variable x peut-être remplacée dans l'intégrale par n'importe quelle lettre : t, u, on dit que c'est une *variable muette* :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

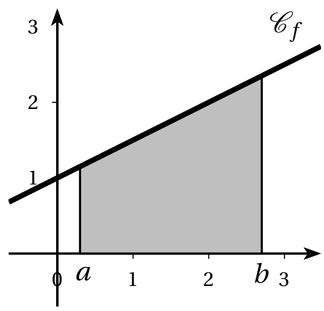
1.2 Quelques exemples

f est constante sur $[a;b]$: $f(x) = \lambda$



$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

f est affine sur $[a;b]$:



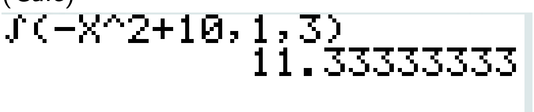
L'aire du trapèze est :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

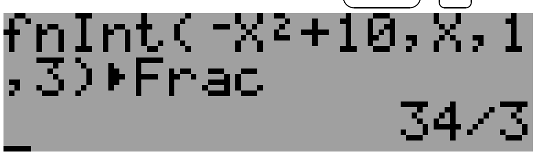
1.3 Calcul approché à l'aide de la calculatrice :

Si on prend une fonction continue et positive sur un intervalle, on peut faire calculer l'intégrale de la fonction par la calculatrice. Par exemple la fonction $f : x \mapsto -x^2+10$ entre 1 et 3 :

Sur CASIO 85+, dans le menu OPTN, F4 (Calc)



Sur TI 83 dans le menu math, 9 (FnInt)



► Exercice 1 Aire sous courbe

On considère la fonction f définie sur $[-2;0]$ par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unités 1 cm.

1. Justifier que f est continue et positive sur $[-2;0]$.

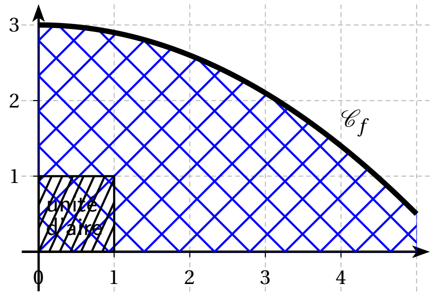
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur arrondie à $0{,}01\,\mathrm{cm}^2$ près de l'aire sous la courbe de f.

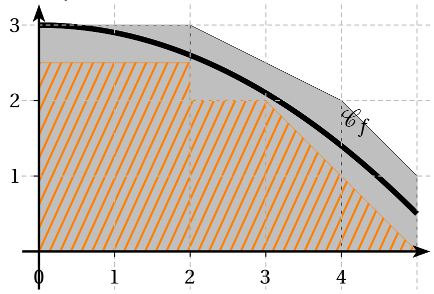
▶ Exercice 2 **Algorithme**

En utilisant l'activité préparatoire, écrire un algorithme qui, pour un nombre de rectangles défini par l'utilisateur donne un encadrement de $I = 4 \times \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
Faire une conjecture quant à la valeur de l'intégrale.

1.4 Estimation graphique d'une intégrale

On veut évaluer l'aire sous la courbe de f entre 0 et 5 par encadrement.





$$\underbrace{2{,}5+2{,}5+2+1{,}5+0{,}5}_{\text{polyg. inf}} \leq \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t \leq \underbrace{3+3+5+1{,}5}_{\text{polyg. sup}}$$

$$9 \leq \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t \leq 12{,}5$$

2 Fonction primitive

2.1 Fonction définie par une intégrale

Théorème 1 (Définition d'une primitive).

Soit f une **fonction continue positive** sur un intervalle $[a;b]$, On peut alors définir la fonction F sur $[a;b]$ telle que $\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}$.
Cette fonction F est alors dérivable sur $[a;b]$ de dérivée égale à f.
F est appelée *primitive de f sur* $[a;b]$.

Démonstration

Nous allons prouver ce théorème dans le cas particulier où f est positive et croissante

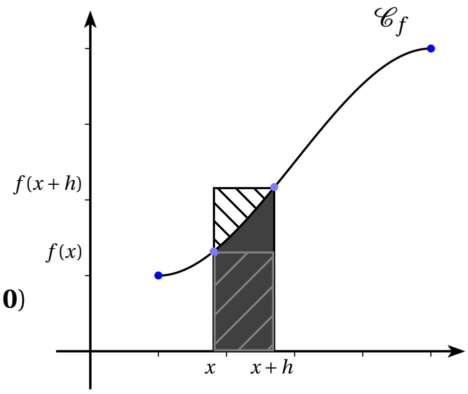
Soit $x \in [a;b]$, on écrit le taux d'accroissement de F entre x et $x+h$:

$$\Delta_x(h) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))$$

Si $h > 0$

$F(x+h)-F(x)$ représente l'aire grise, sous la courbe de f entre x et $x+h$.
Comme f est croissante, cette aire est comprise entre les rectangles d'aire $h \times f(x)$ et $h \times f(x+h)$.
On a donc

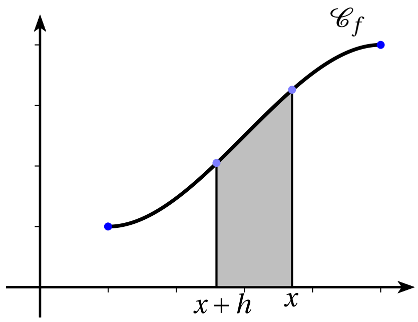
$$\begin{aligned} & hf(x) \leqslant F(x+h)-F(x) \leqslant hf(x+h) \\ \iff & f(x) \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant f(x+h) \quad (\boldsymbol{h>0}) \\ \iff & f(x) \leqslant \Delta_x(h) \leqslant f(x+h) \end{aligned}$$



Si $h < 0$

$F(x)-F(x+h)$ représente l'aire sous la courbe de f entre $x+h$ et x.
Comme f est croissante, cette aire est comprise entre les rectangles d'aire $|h| \times f(x+h)$ et $|h| \times f(x)$. (*Où sont-ils ?*)
On a donc

$$f(x+h) \leqslant \Delta_x(h) \leqslant f(x)$$



Comme f est continue en x, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ et d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0} \Delta_x(h) = f(x)$

Ainsi pour tout $x \in I$, F est dérivable et sa dérivée est :

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

□

Remarque 2.

- La fonction F est croissante sur $[a;b]$... *Pourquoi ?*
- $F(a) = 0$. *Pourquoi ?*

2.2 Définition d'une primitive

Définition 2 (Primitive d'une fonction continue).

Pour toute fonction f continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on appelle *fonction primitive* de f une fonction F telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Théorème 2 (Existence de primitives).

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive.

<u>Démonstration</u>

> $\boxed{\text{ROC}}$ Démonstration dans le cas où l'intervalle $I=[a;b]$ est fermé borné.
> On admet le résultat suivant :
> *toute fonction continue sur un segment admet un minimum.*
> Soit donc une fonction f continue sur un intervalle $I=[a;b]$ et soit m le minimum de f sur le segment $[a;b]$. (On a donc $f(x)\geqslant m$ sur I)
> Alors, la fonction $g=f-m$ est continue **et positive** sur I. On sait donc que g admet une primitive (de la forme $G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$).
> On peut donc considérer la fonction F définie sur I par $F(x)=G(x)+mx$.
> On a $F'(x)=G'(x)+m=g(x)+m=f(x)$.
> Donc f admet pour primitive sur I la fonction F.
>
> $\square$

On a vu, lors de la propriété précédente, que pour toute fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ fermé borné, $x\mapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f définie sur $[a;b]$.

■ **Exemple 1:**
Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2+x$, alors on peut dire que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme $g(0)=0$, on peut dire que $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est <u>la</u> primitive de f qui s'annule en 0.

Remarque 3.

Si F est une primitive de f, alors, pour tout nombre réel k, $F+k$ est aussi une primitive de f.
Autrement dit, deux primitives d'une fonction f diffèrent seulement d'une constante.

Quelle est la conséquence graphique sur les courbes des primitives d'une fonction continue f ?
Par contre, si toute fonction continue admet une primitive, on ne sait pas toujours exprimer celle-ci à l'aide des fonctions usuelles. Par exemple : $x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$*, qui est facile à dériver, que l'on rencontrera lors des chapitres sur les lois de probabilités continues, mais qui n'admet pas de primitive exprimable avec des fonctions usuelles. Pour calculer des intégrales avec cette fonction, on devra utiliser des méthodes numériques du même type de l'approximation des intégrales par des rectangles (ou autres).*

Théorème 3 (Condition d'unicité).

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I=[a;b]$.
Pour tout $x_0\in I$ et tout $y\in\mathbb{R}$, il existe une unique fonction primitive G de f telle que $G(x_0)=y_0$.

▶ Exercice 3 Vérifier et utiliser une primitive

Une entreprise fabrique un produit dont le *coût marginal* est donné en euro par kilo par la fonction $f(q) = 3q^2 - 30q + 95$ pour tout $q \in [0;11]$, q étant en tonnes.

1. Démontrer que la fonction F, définie sur $[0;11]$ par $F(q) = q^3 - 15q^2 + 95q$ est une primitive de f.
2. Pour toute quantité x de $[0;11]$, le *coût total variable* est donné par l'intégrale $C_v(x) = \int_0^x f(q)dq$.
   Sachant que les coûts fixes sont de 7500€, déterminer la fonction coût total C_T et préciser son unité.

2.3 Lien entre primitives et intégrales

On appelle $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ une primitive de f, c'est d'ailleurs la seule qui s'annule en a.

Théorème 4 (Théorème fondamental de l'intégration).

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Méthode 1 (Application au calcul d'aire :)

▶ Exercice 4 Cas d'une fonction positive

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 7x + 10$.

1. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer l'aire sous la courbe de f sur $[0;2]$.

▶ Exercice 5 Cas d'une fonction de signe non constant

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 7x - 6$.

1. Montrer que -1 est une racine de g et en déduire une factorisation, puis l'ensemble des racines de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur R.
3. Calculer l'aire entre la courbe de g et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-2;3]$.

2.4 Propriétés des intégrales

Propriété 1 (Linéarité).

- **Primitive de la somme** Si F et G sont des primitives des fonctions f et g, alors $F + G$ est une primitive de la fonction somme $f + g$.
- **Multiplication par une constante** Si F est une primitive de f sur I et k un nombre réel quelconque, alors kF est une primitive de kf sur I.

Conséquence 1 (Linéarité de l'intégrale).

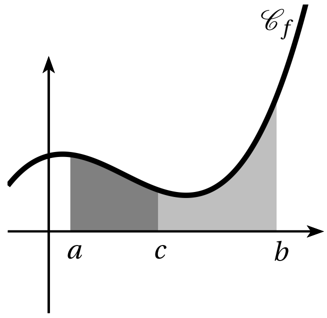
Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$, et λ un nombre réel, alors

- $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Propriété 2 (Relation de Chasles).

Soit f continue sur $I=[a\ ;\ b]$. Si $c\in I$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$



On utilisera dans de nombreux exercices la propriété suivante :

Propriété 3 (Positivité de l'intégrale).

Sur un intervalle $[a;b]$

- si $f\geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f\geqslant 0$
- si $f\leqslant g$, alors $\displaystyle\int_a^b f\leqslant\int_a^b g$.

■ Exemple 2:

Comparer, sans les calculer, les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$$

Méthode 2 (Application aux suites d'intégrales)
On considère la suite (I_n) définie par $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{x^2}\mathrm{d}x$

1. Conjecturer graphiquement, ou à l'aide de la calculatrice, visualiser la situation.
2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1}\leqslant I_n\leqslant\dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$, en déduire la limite.

3 Calculer des primitives

3.1 Tableau des primitives usuelles

⚠Toutes les primitives sont définies à une constante réelle c près.

Fonction f	Primitive F	définie sur
k (constante)	$kx+c$	$\mathbb{R}$
x	$\dfrac{x^2}{2}+c$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|+c$	$]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}+c$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
x^n $(n\in\mathbb{N}\setminus\{-1;0\})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\begin{cases}\mathbb{R} \text{ si } n\leqslant 1\\ ]-\infty\,;\,0[\text{ ou }]0\,;\,+\infty[\text{ sinon}\end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0\,;\,+\infty[$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$
e^{kx}	$\dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}+c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

▶ Exercice 6 **Exemples fondamentaux**

1. Déterminer une primitive des fonctions définies par $f(x)=x^3$, $g(x)=x^4$.
2. Donner une primitive de la fonction définie par $h(x)=3x^2-7x+2$.

3.2 Utiliser les formules de dérivées pour calculer des primitives.

Propriété 4 (À partir des formules de composition).

La primitive d'une fonction de la forme $x\longmapsto u'(x)(f\circ u)(x)$ est de la forme $x\longmapsto f\circ u+c$

■ Exemple 3:

Une primitive de la fonction définie par $f(x)=-4\mathrm{e}^{2x}$ est de la forme $F(x)=-2\mathrm{e}^{2x}$.

▶ Exercice 7

Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$$f(x)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\qquad g(x)=\mathrm{e}^{5x-1}$$

3.3 Intégration par parties

Comme pour la dérivation, il faut bien retenir que la primitive d'un produit n'est pas le produit des primitives.

Propriété 5 (Intégration par parties).

Soient u et v deux fonctions qui admettent des dérivées u' et v' continues sur l'intervalle $[a;b]$. Alors $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$

<u>Démonstration</u>

uv est une primitive de $u'v + uv'$

Donc $[u(x)v(x)]_a^b = \displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$. D'où la propriété.

□

▶ Exercice 8

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ en utilisant une intégration par parties.

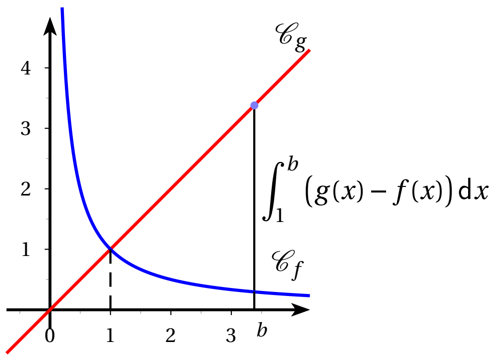
4 Applications

4.1 Aire entre deux courbes

Propriété 6.

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur I telles que $f \leqslant g$. Alors l'aire du domaine délimité par la courbe de f en bas, la courbe de g en haut et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par l'intégrale :

$$A = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

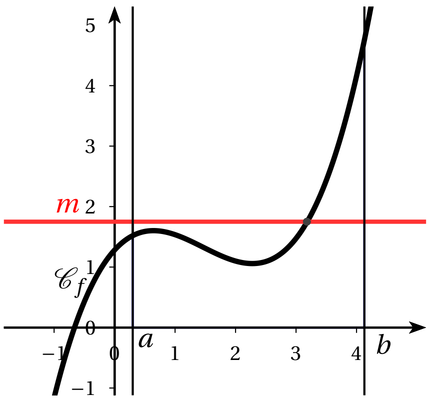


4.2 Valeur Moyenne

Définition 3.

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle Si f est une fonction continue sur l'intervalle I, alors on appelle *valeur moyenne de f sur I* le nombre réel

$$\boxed{m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$



Colorer les aires identiques