EXERCICE 1 SG seuls

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = c \quad \text{fixé} \\ u_{n+1} = au_n + b \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Dans laquelle a est un réel strictement positif et b un nombre réel quelconque.

1. Étude du cas $a = 1$
   (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (b) Déterminer les variations de la suite (u_n).
2. Étude du cas $a \neq 1$
   On considère la fonction $f : x \mapsto ax + b$
   (a) Déterminer le *point fixe* de la fonction f, autrement dit le nombre réel α vérifiant la relation $f(\alpha) = \alpha$ en fonction de a et de b.
   (b) On définit la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \alpha$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n(u_0 - \alpha) + \alpha$.
   (d) En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 2 Tous

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 0,2u_n + 1 \end{cases}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \frac{5}{4}$.
2. Démontrer par récurrence que (u_n) est décroissante.

EXERCICE 3 Tous

Dans une ville, un nouveau lycée vient d'ouvrir ses portes et accueille pour sa première rentrée 500 élèves. D'une année sur l'autre, le proviseur du lycée prévoit une perte de 30 % de l'effectif et l'arrivée de 300 nouveaux élèves.

On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année $2013 + n$, avec n entier naturel. On a donc $u_0 = 500$.

1. (a) Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2014.
   (b) Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2015.
   (c) Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 300$.
3. On souhaite, pour un entier n donné, afficher tous les termes de la suite (u_n) du rang 0 au rang n.
   Lequel des trois algorithmes suivants permet d'obtenir le résultat souhaité ? Justifier.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables : n, i entiers naturels, u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n Afficher u u prend la valeur $0,7 \times u + 300$ Fin Pour **Fin algorithme**	**Variables :** n, i entiers naturels, u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n Afficher u u prend la valeur $0,7 \times u + 300$ Fin Pour Afficher u **Fin algorithme**	**Variables :** n, i entiers naturels, u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n u prend la valeur $0,7 \times u + 300$ Fin Pour Afficher u **Fin algorithme**

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 1\,000$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,7$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,000 - 500 \times 0,7^n$.