Feuille de TD n°8
TD — Suites numériques

1 Recherche de seuils

Soit (w_n) une suite définie pour tout entier non nul n par $w_n = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

1. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $w_n \in]1{,}99\,; 2{,}01[$.
2. Déterminer le plus petit entier n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, on a $|w_n - 2| < 10^{-4}$.
3. Soit ε un nombre réel strictement positif. Déterminer le plus petit entier n_2 tel que pour tout $n \geqslant n_2$, on a $|w_n - 2| < \varepsilon$.

2 Déterminer deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant les conditions suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 3$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 3$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 3$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$

3 Donner, dans chaque cas, la limite de la suite si elle existe.

1. $u_n = \sqrt{n} + n^2$
2. $u_n = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \dfrac{1}{n^2}$
3. $u_n = ((n + \pi^n)$
4. $u_n = 3 + \dfrac{1}{n^4}$
5. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - n^3$
6. $u_n = -4 + \left(\dfrac{7}{10}\right)^n + n^5$
7. $u_n = n^2 - n$
8. $u_n = -n + \sqrt{n}$
9. $u_n = -\left(-\sqrt{n} + n^7\right)$
10. $u_n = -(n^6 - n^3)$
11. $u_n = n^6 - n^4 + n^2 - n$
12. $u_n = (n^5 - 4)(3 - n)$
13. $u_n = 5 \times \left(\dfrac{185}{192}\right)^n$
14. $u_n = \left(3 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\dfrac{1}{n^2} - 4\right)$
15. $u_n = -2 \times \left(\dfrac{18}{17}\right)^n$
16. $u_n = \dfrac{1}{n^2}(n-2)$
17. $u_n = \dfrac{1}{n}(n-2)$
18. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(n^3 - 2\right)$
19. $u_n = \dfrac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}$
20. $u_n = \dfrac{3n^2 + 4}{2n + 5}$
21. $u_n = \dfrac{2n - 1}{5 - 3n}$
22. $u_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{n^3}$
23. $u_n = \dfrac{\left(\frac{7}{5}\right)^n}{\left(\frac{5}{3}\right)^n}$

4 Théorèmes de comparaison :

1. Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n^2 + 1$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. Soit (v_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant -3n - 4$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
3. Soit (w_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $2n - 1 \leqslant w_n \leqslant 2n + 1$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
4. Soit (t_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2n+1} \leqslant t_n \leqslant \dfrac{1}{2n-1}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$

5 algorithme de seuil On considère la suite (u_n) définie $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 1{,}2 \times u_n$, $u_0 = 1$.

1. Quelle est la limite de (u_n) ?
2. Écrire une fonction en Python permettant de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle u_n aura dépassé deux fois la valeur initiale.
3. Adapter l'algorithme pour qu'il renvoie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1000$.
4. Généraliser à un seuil quelconque.

6 Théorème de convergence monotone

Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement (variations, limites) de la suite (u_n).
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < u_n$.
3. Justifier que la suite (u_n) converge.
4. Soit ℓ la limite de la suite. On admet que $\ell = \dfrac{1}{3}\ell + 2$. Déterminer la valeur de ℓ.

7 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.
3. En déduire que (u_n) est convergente vers un réel ℓ.
4. En utilisant le théorème du point fixe, déterminer la valeur de ℓ.

8 Même énoncé pour la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2 + 3u_n}{4 + u_n}$. On montrera que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 3$.

9 Démontrer le théorème des suites adjacentes.

10 Suites adjacentes

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   On appelle ℓ leur limite commune.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit pour tout réel $x \in [0\,;1]$ la fonction f par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-x}$$

   (a) Que vaut $f(0)$?
   (b) Montrer que $f(1) = \dfrac{u_n}{\mathrm{e}}$

(c) Montrer que pour tout réel $x \in [0;1]$,

$$f'(x) = -\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$$

(d) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;1]$.

(e) En déduire que $u_n \leqslant \mathrm{e}$

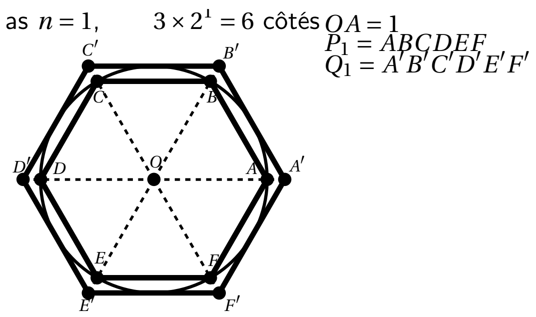
3. On considère la fonction g définie sur $[0;1]$ par $g(x) = f(x) + \dfrac{x}{n!}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

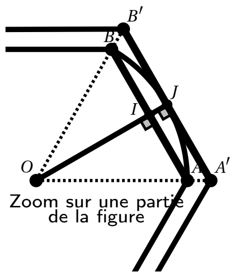
   (a) Dresser le tableau de variations de g

   (b) En déduire que $u_n \geqslant \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{n!}$

4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

$\boxed{11}$ Méthode d'Archimède : approximation de π Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1, on construit, pour $n \geqslant 1$, deux polygones réguliers P_n et Q_n ayant 3×2^n côtés. P_n étant inscrit dans le cercle et Q_n exinscrit (côtés tangents au cercle).





On admet que le périmètre du cercle est 2π et qu'il est encadré par les périmètres des deux polygones. On note p_n et q_n les **demi-périmètres** des polygones P_n et Q_n. De cette façon, on a :

$$p_n \leqslant \pi \leqslant q_n$$

1. **Cas $n = 1$**
   Montrer que $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$

2. **Expression de p_n et q_n**

   (a) Justifier que l'angle au centre qui intercepte l'un des côtés de P_n et de Q_n est de $\dfrac{2\pi}{3 \times 2^n}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$,

   $$p_n = 3 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \text{ et } q_n = 3 \times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$$

3. **Relations de récurrence ****

   (a) On pose $\alpha = \dfrac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}$. Exprimer p_n et q_n en fonction de n et α

   (b) Exprimer $\sin(2\alpha)$ et $1 + \cos(2\alpha)$ en fonction de $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$.

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}\right) \text{ et } p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}$$

   (d) Utiliser les relations précédentes pour déterminer p_2 et q_2.

4. **Étude des suites (p_n) et (q_n)**

   (a) Soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$. Démontrer que

   $$a < \sqrt{ab} < b \qquad \text{et} \qquad a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b$$

   (b) En utilisant une récurrence, démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $p_n < q_n$.

   (c) En déduire que la suite (p_n) est croissante et que (q_n) est décroissante.

   (d) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

   $$q_{n+1} - p_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(q_n - p_n)$$

   (e) En déduire que $q_n - p_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$

5. Démontrer que les suites (p_n) et (q_n) sont convergentes vers la même limite.

Feuille de TD n°8
Réponses ou Solutions

1 10^4, 10^8, $\dfrac{1}{\varepsilon^2}$

4 $+\infty$, $-\infty$, $+\infty$, 0

5

```python
def seuil(S):
    u=1
    n=0
    while u<=S:
        u=u*1.2
        n=n+1
    return n
```

```
>>> seuil(2)
4

>>> seuil(1000)
38
```

6 Récurrence facile, soit en utilisant la croissance de la fonction affine $x \mapsto \dfrac{1}{3}x+2$, soit en fabriquant les termes suivants par des opérations élémentaires. Limite $\ell = 3$.

8 $f'(x) = \dfrac{10}{(4+x)^2} > 0$, donc f est croissante sur $[0;3]$

Si $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$ alors $f(0) = \dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant f(3) = \dfrac{11}{7} \leqslant 2 \leqslant 3$

$\ell = f(\ell) \iff \ell$ vérifie $x^2 + x - 2 = 0 \iff \ell = 1$ ou $\ell = 2$, or $\ell < \dfrac{11}{7} < 2$, donc $\underline{\ell = 1}$.

10

1. (u_n) est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$. Et (v_n) décroissante car $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{n(n+1)(n+1)!}$.
   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Donc les suites sont adjacentes, et donc convergentes par théorème.
2. (a) $f(0) = 1$

   (b) $f(1) = u_n \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{u_n}{\mathrm{e}}$

   (c) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(0 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{2x}{2!} + \dfrac{3x^2}{3!} + \ldots + \dfrac{nx^{n-1}}{n!}\right) - \mathrm{e}^{-x}\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}\right) = -\dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} < 0$ sur $[0;1]$

   (d) Donc

x	0	1
f	1 $\searrow$	$\dfrac{u_n}{\mathrm{e}}$

   (e) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n}{\mathrm{e}} \leqslant 1 \iff \underline{u_n \leqslant \mathrm{e}}$.
3. (a) $g'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{n!} = -\dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{n!}\left(1 - x^n \mathrm{e}^{-x}\right)$
   Or, $\forall x \in [0;1]$, $x^n \in [0;1]$ et $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$, donc $\forall x \in [0;1]$, $\left(1 - x^n\mathrm{e}^{-x}\right) \geqslant 0$ ainsi,

x	0	1
$g'(x)$	$+$	
g	1 $\nearrow$	$\dfrac{u_n}{e} + \dfrac{1}{n!}$

(b) Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_n}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{n!} \geqslant 1 \iff u_n \geqslant \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{n!}$

4. Ainsi, d'après les questions précédentes, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{n!} \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim u_n = \mathrm{e}$