

Prénom :

Nom :

Série technologique

*Calculatrices autorisées***► Exercice 1** /3

- (a) Déterminer l'ensemble des réels  $x$  tels que  $\ln(6x-2)$  est défini.  
(b) Déterminer l'ensemble des réels  $x$  tels que  $\ln(2x-1)$  est défini.  
(c) Déterminer l'ensemble des réels  $x$  tels que  $\ln(x)$  est défini.
- Résoudre l'équation suivante :

$$\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln x$$

**► Exercice 2** /7,5

- Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 + \ln(x)$ .
  - Démontrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $g'(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}$ .
  - Étudier le signe de  $g(x)$  pour  $x \in ]0; +\infty[$ .
  - Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$ .
  - Déterminer les limites de  $g(x)$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
  - Montrer que  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $]0; +\infty[$  puis déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
  - Déduire de ce qui précède le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .
- On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x^2 + (\ln(x))^2$ .
  - Démontrer que pour tout réel  $x \in ]0; +\infty[$ , on a

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$$

- Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- En déduire que  $f$  admet un minimum en  $x = \alpha$ .

**► Exercice 3** /5,5

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ .

- Justifier que  $u_1 = \frac{3}{2}$ .
- Calculer  $u_2$  et  $u_3$ . Donner les valeurs exactes puis comparer les valeurs  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
- (a) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n \leq 2$$

- Comment peut-on interpréter ce résultat pour la suite  $(u_n)$  ?

- (a) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n \leq u_{n+1}$$

- Comment peut-on interpréter ce résultat pour la suite  $(u_n)$  ?

**► Exercice 4** /4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 4 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- Démontrer que  $f$  est impaire.
- Démontrer que  $f$  est  $4\pi$ -périodique.
- Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et étudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .