▶ Exercice 1 /2

Résoudre l'équation suivante :

$$\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln x$$

▶ Exercice 2 /9

Partie I **Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x+2-x\ln(x)$$

1. Étudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de g sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie II **Étude d'une fonction f**

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{2+x}$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Montrer que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(2+x)^2}$.
2. En utilisant l'égalité $g(\alpha)=0$, prouver que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$.
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Dresser le tableau de variation complet de f sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice 3 /5

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty]$ par $f(x)=5-\dfrac{4}{x+2}$.

1. Démontrer que f est croissante sur $[0;+\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur $[0;+\infty[$. On note α la solution. Donner la valeur exacte puis un encadrement entre deux entiers consécutifs.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$.
   Interpréter ce résultat.

▶ Exercice 4 /4

Soient f et g deux fonctions définies sur $[0;2\pi]$ par $f(x)=2x\cos(2x)$ et $g(x)=\sin(2x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et de g dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Montrer que $f'(x)=2\cos(2x)-4x\sin(2x)$. Calculer $g'(x)$.
2. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune au point O, origine du repère.
3. Soit a un réel. Déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a et la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse a sont parallèles.