▶ Exercice 1 /7

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

Partie I Étude d'une fonction auxiliaire

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
En déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie II Étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
2. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = e^{-x} g(x).$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α.
   Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
5. (a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

▶ Exercice 2 /3

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?