$\boxed{\text{Correction DS 5}}$ CPES

Exercice 1 $\quad f(x) = x+1+\frac{x}{e^x}$

PARTIE I $\quad g : x \mapsto 1-x+e^x$

1°) $g'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Var° de g		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 2 > 0$. g est strictement positive sur $\mathbb{R}$

PARTIE II

1°) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ avec $e^x > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ d'après le théorème de croissances comparées.

2°) f est derivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + \frac{e^x \times 1 - xe^x}{(e^x)^2} = 1 + \frac{\cancel{e^x}(1-x)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{e^x - x + 1}{e^x}$

Ainsi, $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

On en déduit que $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4°) Sur $]-\infty ; +\infty[$

* f est continue car derivable
* f strictement croissante
* $0 \in]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

De plus $f(-1) = \dfrac{-1}{e^{-1}} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$
$= -e$

Donc $\boxed{-1 < \alpha < 0}$

5°) a) Tangente en 0 : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$\boxed{y = 2x+1}$ car $f'(0) = e^{-0} \times g(0) = 2.$
$f(0) = 1.$

b) On étudie le signe de $f(x) - (2x+1) = h(x)$

$$h(x) = f(x) - 2x - 1 = \frac{x}{e^x} - x = x\left(\frac{1-e^x}{e^x}\right)$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe $\frac{x}{e^x}$		$-$	ϕ	$+$	
Signe $(1-e^x)$		$+$	ϕ	$-$	
Signe de $h(x)$		$-$	ϕ	$-$	

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (2x+1) \leq 0$
$\Leftrightarrow$ $\boxed{f(x) \leq 2x+1}$

Donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } T_0}$

Exercice 2

$a \in \mathbb{R}$, $f_a : x \mapsto e^{x-a} - 2x + e^a$

1°) $f_a'(x) = e^{x-a} - 2$ or $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} = 2$
$\Leftrightarrow x - a = \ln 2$
$\Leftrightarrow x = a + \ln(2)$

$e^{x-a} - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant a + \ln(2)$

x	$-\infty$		$a+\ln(2)$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	ϕ	$+$	
Var° de f_a		$\searrow$	$f_a(a+\ln(2))$	$\nearrow$	

$\boxed{f_a \text{ possède donc un minimum en } a + \ln(2)}$

$f_a(a+\ln 2) = e^{\ln 2} - 2(a+\ln 2) + e^a$
$= 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$

2°) Si on étudie l'évolution du minimum en fonction de a, on peut poser $g(x) = 2 - 2x - 2\ln 2 + e^x$

$g'(x) = -2 + e^x$ et $\boxed{g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2.}$

$\boxed{\text{C'est bien un minimum}}$ Donc le plus petit minimum de f_a est lorsque $\boxed{a = \ln 2.}$