

Correction DS 5

CPES

Exercice 1 $f(x) = x+1 + \frac{x}{e^x}$

PARTIE I

$$g: x \mapsto 1-x+e^x$$

$$1) \quad g'(x) = e^x - 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
var de g			

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 2 > 0$ - g est strictement positive sur $\mathbb{R}$

PARTIE II

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{avec} \quad e^x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{d'apr\u00e8s le th\u00e9or\u00e8me de croissance compar\u00e9es.}$$

2) f est d\u00e9rivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 + \frac{e^x \times 1 - x e^x}{(e^x)^2} = 1 + \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x - x + 1}{e^x}$$

$$\text{Ainsi, } f'(x) = e^{-x} \times g(x)$$

On en d\u00e9duit que $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) Sur $] -\infty; +\infty[$

* f est continue car d\u00e9rivable

* f strictement croissante

* $0 \in] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$

D'apr\u00e8s le th\u00e9or\u00e8me de la bijection, il existe un unique nombre r\u00e9el tel que $f(x) = 0$.

De plus $f(-1) = \frac{-1}{e^{-1}} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$
 $\quad \quad \quad = -e$

Donc $-1 < \alpha < 0$

5°) a) Tangente en 0 : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$
 $y = 2x + 1$ car $f'(0) = e^{-0} \times g(0) = 2$.
 $f(0) = 1$.

b) On étudie le sign de $f(x) - (2x+1) = h(x)$

$$h(x) = f(x) - 2x - 1 = \frac{x}{e^x} - x = x \left(\frac{1 - e^x}{e^x} \right)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
sign $\frac{x}{e^x}$	-	ϕ	+
sign $(1 - e^x)$	+	ϕ	-
sign de $h(x)$	-	ϕ	-

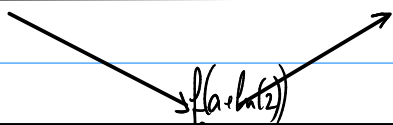
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - (2x+1) \leq 0$
 $\Leftrightarrow f(x) \leq 2x+1$

Donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de T_0

Exercice 2 $a \in \mathbb{R}, f_a : x \mapsto e^{x-a} - 2x + e^a$

1°) $f'_a(x) = e^{x-a} - 2$ or $f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} = 2$
 $\Leftrightarrow x - a = \ln 2$
 $\Leftrightarrow x = a + \ln(2)$

$$e^{x-a} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq a + \ln(2)$$

x	$-\infty$	$a + \ln(2)$	$+\infty$
$f'_a(x)$	-	ϕ	+
Var de f_a			

f_a possède donc un minimum en $a + \ln(2)$

$$f_a(a + \ln 2) = e^{\ln 2} - 2(a + \ln 2) + e^a$$

$$= 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$$

2°) Si on étudie l'évolution du minimum en fonction de a , on peut poser $g(x) = 2 - 2x - 2\ln 2 + e^x$

$g'(x) = -2 + e^x$ et $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

C'est bien un minimum

Donc le plus petit minimum de f_a est lorsque $a = \ln 2$.