▶ Exercice 8 Une suite homographique

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n+2}{2u_n+1}$ pour tout entier n.

1. (a) On trouve $u_1 = \dfrac{4}{5}$, $u_2 = \dfrac{14}{13}$, $u_3 = \dfrac{40}{41}$, $u_4 = \dfrac{122}{121}$

   (b)
   - $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$ est positif donc du signe de $(-1)^0$
   - $u_1 - 1 = \dfrac{4}{5} - 1 = -\dfrac{1}{5}$ est négatif donc du signe de $(-1)^1$
   - $u_2 - 1 = \dfrac{14}{13} - 1 = \dfrac{1}{13}$ est positif donc du signe de $(-1)^2$
   - etc…

   (c) Soit n un entier naturel quelconque

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{u_n+2}{2u_n+1} - 1 \\ &= \frac{u_n+2-(2u_n+1)}{2u_n+1} \\ &= \frac{-u_n+1}{2u_n+1} \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n+1}{2u_n+1}$

   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}_n$: « $u_n - 1$ est du même signe que $(-1)^n$ »

   ⋆ initialisation : $\mathscr{P}_0$ est vraie car $u_0 - 1 = 1$ est du même signe que $(-1)^0$.

   ⋆ hérédité : Pour un $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathscr{P}_k$ est vraie, c'est à dire que $u_k - 1$ est du même signe que $(-1)^k$.
   D'après la question précédente,

$$u_{k+1} - 1 = -\frac{u_k - 1}{2u_k + 1}$$

   Le dénominateur est positif car on sait d'après l'énoncé que $u_n > 0$ pour tout n entier. Ainsi, $u_{k+1} - 1$ est du signe contraire à $u_k - 1$, soit du signe contraire à $(-1)^k$.
   Ainsi, $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

   ⋆ conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - 1 \text{ est du même signe que } (-1)^n$$

2. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   (a) Si $n \in \mathbb{N}$ quelconque,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} \\ &= \frac{\frac{u_n+2}{2u_n+1} - 1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1} + 1} \\ &= \frac{u_n+2-(2u_n+1)}{u_n+2+2u_n+1} \\ &= \frac{-u_n+1}{3u_n+3} \end{aligned}$$

   (b) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = -\frac{1}{3}\frac{u_n-1}{u_n+1} = -\frac{1}{3}v_n$$

   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$.

   Par propriété, on a donc, pour tout n entier naturel, $v_n = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(c) En remplaçant v_n par son expression explicite, on obtient, pour tout n, $u_n = \dfrac{1+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$ et donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

▶ Exercice 9

1.

k	a	b	u	v
	4	9	4	9
0	6,5	6,964	6,5	$\sqrt{\dfrac{97}{2}}$
1	6,732	6,736	6,732	6,736

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. (a) On pose $\mathscr{P}_n$: « $u_n > 0$ et $v_n > 0$ ».
   - *Initialisation :*
     On a $0 < a < b$ donc $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$ ainsi, $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - *Hérédité :*
     Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
     $v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}} > 0$ car une racine carrée est toujours positive.
     D'après $\mathscr{P}_n$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$ donc $u_n + v_n > 0$, ainsi $u_{n+1} > 0$.

     Ainsi, si $\mathscr{P}_n$ est vraie, alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie aussi.
   - *Conclusion :*
     La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0 \text{ et } v_n > 0$$

(b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 &= \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \frac{(u_n + v_n)^2}{4} \\ &= \frac{2u_n^2 + 2v_n^2 - (u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2}{4} \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{4} \\ &= \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geqslant 0$,
soit pour tout $n \geqslant 1$, $v_n^2 - u_n^2 \geqslant 0 \iff (v_n + u_n)(v_n - u_n) \geqslant 0$.
Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$ donc $u_n + v_n > 0$, ce qui signifie que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n - u_n \geqslant 0$ et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant v_n$. Comme $u_0 = a < v_0 = b$, on peut affirmer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2}$ donc d'après la question 2.(b), $v_n - u_n \geqslant 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc la suite (u_n) est croissante.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$
   $v_{n+1}^2 - v_n^2 = \dfrac{u_n^2 + v_n^2 - 2v_n^2}{2} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{2}$.
   Or, $0 < u_n \leqslant v_n$ donc $u_n^2 \leqslant v_n^2$ (par croissance de la fonction carré sur $]0\,; +\infty[$.) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}^2 - v_n^2 \leqslant 0$ et donc $\left(\underbrace{v_{n+1} + v_n}_{>0}\right)(v_{n+1} - v_n) \leqslant 0$ donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et donc la suite (v_n) est décroissante.