Correction DS 4 - Série technologique

Exercice 1

1°) $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$

$f'(x) = 2\sqrt{x} + (2x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{4x + 2x+1}{2\sqrt{x}}$

$\boxed{f'(x) = \frac{6x+1}{2\sqrt{x}}}$

2°) $g(x) = \frac{3x-4}{x^2+x+1}$

$g'(x) = \frac{3 \times (x^2+x+1) - (3x-4)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$\boxed{g'(x) = \frac{-3x^2+8x+7}{(x^2+x+1)^2}}$

Exercice 2

$$\begin{cases} x-2y+z=-4 \\ 4x-y+2z=0 \\ 3x+y-2z=7 \end{cases} \underset{\substack{L_2-4L_1 \\ L_3-3L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y+z=-4 \\ 7y-2z=16 \\ 7y-5z=19 \end{cases} \underset{L_3-L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y+z=-4 \\ 7y-2z=16 \\ -3z=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=-4 \\ 7y=14 \\ z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\cancel{4}+(-1)=\cancel{-4} \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}$$

$\boxed{S = \{(1;2;-1)\}}$

Exercice 3

$A(-4;1)$ $B(-2,2)$ $C(4;5)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ $\vec{AC} = 4\,\vec{AB}$ donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires. Ainsi, $\boxed{\text{A, B et C sont alignés}}$

Exercice 4

$A(-2,0)$ $B(2,\cancel{8}\,2)$ $C=(-4,4)$

1°) Placement des points

2°) $\vec{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

$AB = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

3°) Donc $AB = AC$ donc ABC isocèle en A

4°) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times (-2) + 2 \times 4 = 0$ donc $(AB) \perp (AC)$

Ainsi ABC est rectangle en A.

5°) $\vec{BC}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}\begin{matrix}-b\\a\end{matrix}$ donc $\boxed{(BC) : 2x+6y=16}$

$\underset{x_B}{2 \times 2} + \underset{y_B}{6 \times 2}$

Exercice 5

Calcul de BC

$\widehat{ACB} = 180 - (75+55) = 50°$

D'après la loi des sinus, $\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = \frac{BC}{\sin 75} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin 50} = \frac{BC}{\sin 75}$

$\Leftrightarrow BC = 5 \frac{\sin 75}{\sin 50} \simeq 6{,}3 \text{ cm}$

Calcul de DF

D'après le th. d'Al-Kashi

$DF^2 = ED^2 + EF^2 - 2\, ED \times EF \times \cos 135° \simeq 25 - 24 \cos 135° = 25 + 12\sqrt{2}$

Donc $DF \simeq 6{,}5 \text{ cm}$.

Exercice 6 :

1°) $A(-2,3)$ centre, rayon 2

$\mathcal{C} : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

2°) a) $x^2 + y^2 - 5x + 2y = 2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + (y+1)^2 - 1 = 2$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{37}{4}$

Donc centre $\Omega\left(\frac{5}{2}; -1\right)$ rayon : $\frac{\sqrt{37}}{2}$

2°) b) $B(2;2)$: $x_B^2 + y_B^2 - 5 \times x_B + 2 y_B = 4 + 4 - 10 + 2 \times 2 = 2$

donc les coordonnées de B vérifient l'équation du cercle

donc $B \in \mathcal{C}\left(\Omega; \frac{\sqrt{37}}{2}\right)$