

Nom : Prénom : Sujet 1 : EDS Terminale

Calculatrices autorisées. Le barème, fixé à 25 points est donné à titre indicatif et n'a rien de définitif. Le problème ne sera pas noté et à terminer à la maison.

Ne trichez pas, ne chouinez pas, ne répondez pas à des questions qu'on ne vous pose pas et appliquez-vous à rédiger de façon efficace et concise. Donnez tout ce que vous pouvez, le Père Noël vous le rendra au centuple.

⚠ Le sujet est recto-verso

Exercice 1 /3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, on ne détaillera pas l'étude des ensembles de dérivabilité :

1. f définie par $f(x) = \frac{4}{(3x^2 - 5x + 4)^5}$
2. g définie par $g(x) = x(1 - \sqrt{1 - x^2})$
3. h définie par $h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-4}$

Exercice 2 /2,5

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{2 + \cos x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que la fonction f est paire.
3. Montrer que la fonction f est 2π -périodique.

Exercice 3 /2,5

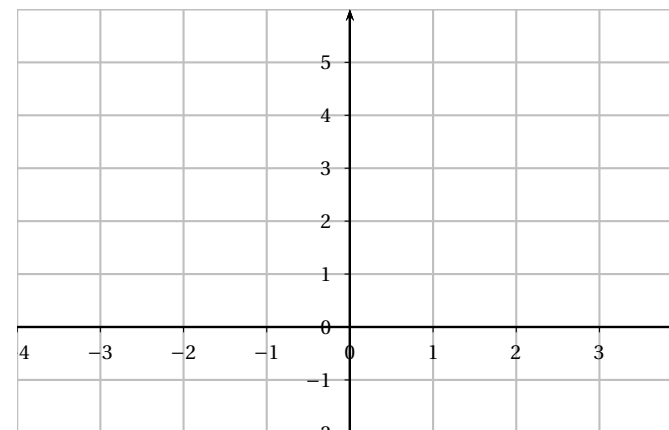
Résoudre les équations/inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x^2 - 12} = 2x - 1$
2. $|2x + 3| = |2 - x|$

Exercice 4 /4

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2x - 1| - \frac{1}{2}|3 - 2x| + 1$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Écrire l'expression $f(x)$ sans valeurs absolues suivant les valeurs de x .
3. Représenter le graphe de la fonction f dans le repère ci-dessous :



Exercice 5 /13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$, et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal

1. Étude d'une fonction auxiliaire /4,5

On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$

- (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- (b) Déterminer les variations de g sur $\mathbb{R}$.
- (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera un encadrement à 10^{-2} .
- (e) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

2. Étude de f /4,5

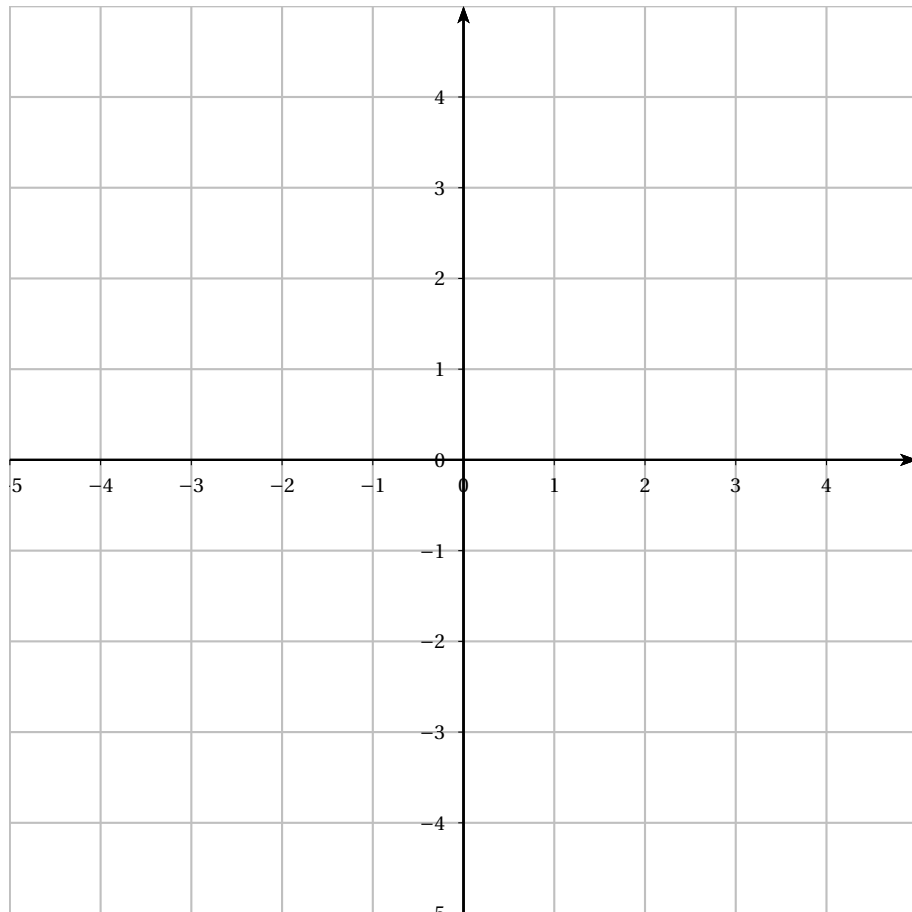
- (a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de f .
- (b) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$
- (c) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- (d) Étudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$ et dresser le tableau de variations de f .
- (e) Montrer que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$

3. Étude du comportement en l'infini /2,5

- (a) Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$.
- (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$.
Quelle interprétation graphique peut-on faire de ces résultats ?

4. **Tracé** /1,5

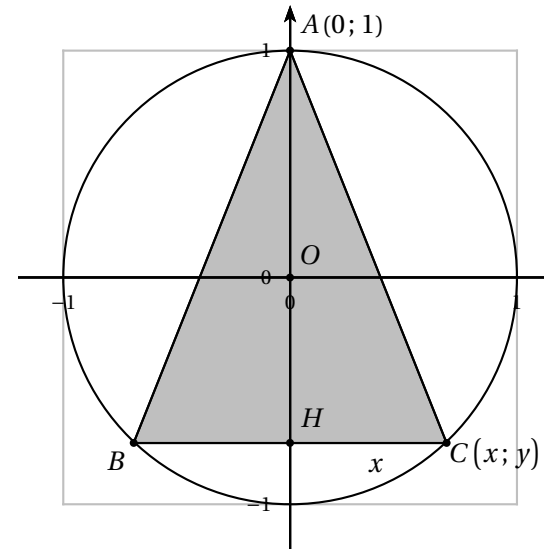
Dans le repère ci-dessous, on fera apparaître une allure du graphe $\mathcal{C}$ de la fonction f . On mettra en évidence les tangentes horizontale, les asymptotes éventuelles. En particulier, indiquer le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1.



Exercice 6

Problème - Non noté

Dans cet exercice, on va déterminer quel est le triangle isocèle inscrit dans un cercle de rayon 1 qui a une aire maximale. On se place donc dans le cercle « trigonométrique », centré en O et de rayon 1.



On considère un triangle ABC , isocèle en A , inscrit dans un cercle de rayon 1. H est le pied de la hauteur issue du sommet principal. A est fixe et le point C est mobile sur le cercle, on appelle x l'abscisse de C , et y son ordonnée.

On a $x \in [0; 1]$.

Les coordonnées des points sont : $A(0; 1)$, $B(-x; y)$ et $C(x; y)$.

- Justifier que $C(x; y)$ appartient au cercle si et seulement si $x^2 + y^2 = 1$.
- Justifier que $AH = 1 - y$. En déduire que l'aire du triangle isocèle ABC est $x(1 - \sqrt{1 - x^2})$.
- On pose, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) = x(1 - \sqrt{1 - x^2})$.
 - Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2} - 1 + 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$.
 - Résoudre l'équation $\sqrt{1 - x^2} = 1 - 2x^2$. En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f .
- Quelle est la nature du triangle isocèle d'aire maximale inscrit dans le cercle unité ?