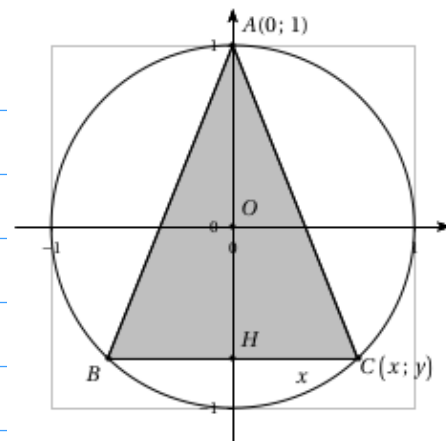


DM 7 - CPES Correction -



$$1^{\circ}) C(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow OC = 1$$

$$\Leftrightarrow OC^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$2^{\circ}) AH = AO + OH = 1 + (-y) = 1 - y$$

$$A_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{2x \times (1 - y)}{2} = x(1 - y)$$

et $y = -\sqrt{1 - x^2}$ car $y \leq 0$ donc $A_{ABC} = x(1 + \sqrt{1 - x^2})$

$$3^{\circ}) \text{ Soit } x \in [0, 1]. \quad f(x) = x(1 + \sqrt{1 - x^2})$$

$$3^{\circ}) a) f \text{ dérivablessi } x \in]0, 1[\text{ et } 1 - x^2 > 0$$

$$\text{donc } x \in]0, 1[.$$

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f'(x) = 1 \times (1 + \sqrt{1 - x^2}) + x \times \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} \right)$$

$$= 1 + \sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - x^2} + (1 - x^2) - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$3-b) \sqrt{1-x^2} = -1+2x^2$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2 = (2x^2-1)^2 \text{ et } 2x^2-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2 = 1-4x^2+4x^4 \text{ et } x^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^4-3x^2=0 \text{ et } x \in]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(x^2 - \frac{3}{4}) = 0 \text{ et } x \in]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \text{ et } x \in]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

3-c) On en déduit le signe de f' et les variations de f :

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$f'(x)$		+	-
Variations de f	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	1

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{4}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \text{Aire max.}$$

4°) Si $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $BC = \sqrt{3}$. $y = -\sqrt{1-x^2}$ donc $y = -\sqrt{1 - \frac{3}{4}}$

$$y = -\frac{1}{2}$$

Donc $AH = \frac{3}{2}$, donc $\tan \widehat{HAC} = \frac{HC}{AH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

donc $\widehat{HAC} = 30^\circ$ donc $\widehat{BAC} = 60^\circ$

Donc ABC est équilatéral.