

Correction DN 5

Exercice 1

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x - \sin x \cos x$$

Pairité: Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x - \sin(-x) \cos(-x) \\ &= -x + \sin x \cos x \\ &= -(x - \sin x \cos x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Donc f est impaire

Périodicité:

Contre exemple:

$$f(0) = 0 + \overset{=0}{\sin(0)} \cos(0)$$
$$f(0) = 0$$

$$\text{et } f(\pi) = \pi + \overset{=0}{\sin(\pi)} \cos(\pi)$$

$$f(\pi) = \pi$$

Donc $f(\pi) \neq f(0)$ Donc f n'est pas π -périodique

Exercice 2

1°) f_1 dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

f_1 de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u'(x) = 10$
 $v'(x) = 2x - 1$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, f_1'(x) = \frac{(x^2 - x) \times 10 - (10x - 80)(2x - 1)}{(x(x-1))^2}$$

$$\text{Donc } f_1'(x) = \frac{-10x^2 + 160x - 80}{(x(x-1))^2} = -10 \frac{x^2 - 16x + 8}{(x(x-1))^2}$$

2°) $x^2 - x + 1$ a un discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$$

Donc f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}, f_2'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

3°) $3x^2 + x + 2$ a un discriminant $\Delta = 1 - 24 = -23 < 0$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 + x + 2 \neq 0$$

Ainsi, f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } f_3'(x) = -4 \times (3x^2 + x + 2)^{-7}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_3(x) = -7 \times (-4)^{(6x+1)} \times \sqrt{(3x^2+x+2)}^{-8}$

$$f'_3(x) = \frac{28(6x+1)}{(3x^2+x+2)^8}$$

Exercice 3 :

Sur $[0, 4]$, $f(x) = x\sqrt{4x-x^2}$

1°) a) $4x - x^2 = x(4-x)$ s'annule en 0 et 4
et $4x - x^2 > 0$ sur $]0, 4[$

Comme la fonction racine est dérivable sur $]0; +\infty[$
on a $x \mapsto \sqrt{4x-x^2}$ qui est dérivable sur $]0; +\infty[$

Donc, par produit, f est dérivable sur $]0; 4[$

1°) b) $\forall x \in]0, 4[$

$$f'(x) = \sqrt{4x-x^2} + x \frac{-2x+4}{2\sqrt{4x-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{4x-x^2 - x^2 + 2x}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{6x-2x^2}{\sqrt{4x-x^2}}$$

Donc $f'(x) = \frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$

2°)	x	0	3	4
$2x(3-x)$		0	+	0
$\sqrt{4x-x^2}$			+	
$f'(x)$			+	0
f				

3°) $3\sqrt{3} > 2$ donc
 Sur l'intervalle $[0;3]$
 * f est continue car dérivable
 * f est strictement croissante
 * $2 \in [f(0) - f(3)]$
 D'après le th. de la bijection,
 $f(x) = 2$ admet une solution
 unique $\alpha_1 \in [0;3]$

De même sur $[3;4]$
 il existe un unique α_2
 tel que $f(\alpha_2) = 0$ sur $[3;4]$

On a donc exactement 2 solutions sur $[0,4]$.

4°) Par balayage, on obtient $1,115 < \alpha_1 < 1,116$
 (et $\alpha_2 \in [3,934; 3,935]$)

Exercice 4 - Méthode de dichotomie :

$$f(a) f(b) < 0$$

$$\text{soit } m = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{si } f(m) f(b) < 0 \text{ alors } \dots a = m$$

$$\text{sinon } \dots b = m$$