

Limites de fonctions

Table des matières

1	Limite de fonctions	1
1.1	Limites en $\pm\infty$	1
1.2	Limite infinie en un réel $a \in \mathbb{R}$	2
2	Opérations	3
2.1	Somme, produit, inverse et quotient	3
2.2	Composée	3
3	Théorèmes	4
3.1	Comparaison	4
3.2	Gendarmes	4

1 Limite de fonctions

1.1 Limites en $\pm\infty$

Définition 1 (limite finie en $\pm\infty$).

On dit que la fonction f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez grand. On note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

Autrement dit, $\forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x > K, f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ (ou $|f(x) - \ell| < \epsilon$)

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, alors la courbe représentative de f se confond en l'infini avec la droite horizontale $y = \ell$. On dit alors que la droite $y = \ell$ est une *asymptote horizontale* de la courbe de f .

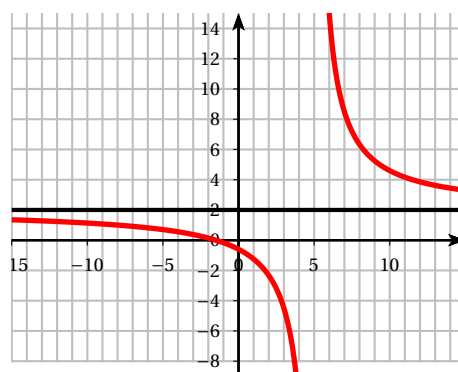
■ Exemple 1:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x-5}$.

$$\text{On a : } \frac{2x+3}{x-5} = \frac{2(x-5)+13}{x-5} = 2 + \frac{13}{x-5}.$$

$$\text{On a donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x-5} = 2.$$

Et donc la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction.



Propriété 1 (Fonctions puissance).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0; +\infty[$. On a :

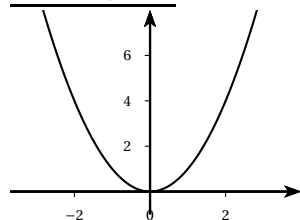
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$$

Définition 2 (limite infinie en $\pm\infty$).

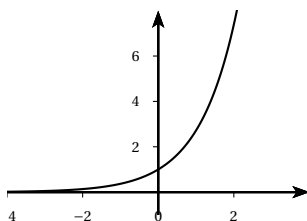
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert du type $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez grand. On note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

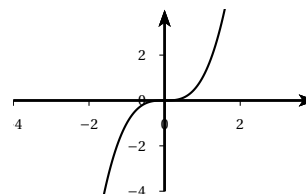
Autrement dit $\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R}, x \geq k \Rightarrow f(x) > A}$

Exemple 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 &= +\infty \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) &= +\infty \\ \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 &= -\infty \end{aligned}$$

Propriété 2 (Fonctions puissance).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0; +\infty[$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$$



Il y a des fonctions qui n'admettent pas de limites en $\pm\infty$: $\sin x$, $\cos x$, $x \sin x$, etc... Tracer les courbes sur la calculatrice

1.2 Limite infinie en un réel $a \in \mathbb{R}$ **Définition 3 (limites en a).**

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert du type $]a-h; a[$ ou $]a; a+h[$.

La fonction f admet pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout x « assez proche » de a . On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

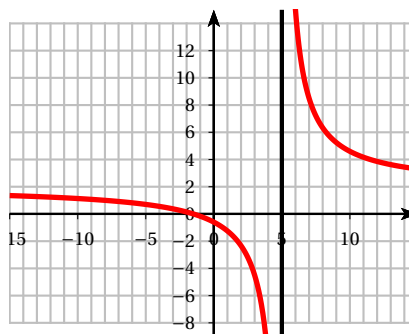
Dans ce cas, la droite $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

■ Exemple 3:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} \frac{2x+3}{x-5} = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} \frac{2x+3}{x-5} = +\infty$$

Il faut regarder quel sera le signe de la fraction pour déterminer si la limite sera plus ou moins l'infini.

Et donc la droite $x=5$ est une asymptote verticale à la courbe de la fonction.



2 Opérations

2.1 Somme, produit, inverse et quotient

Les règles d'opérations sur les limites des fonctions sont les mêmes que pour les suites.

1. Limite d'une somme :

f	g	$f+g$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.

2. Limite d'un produit :

f	g	$f \times g$
ℓ	ℓ'	$\ell \times \ell'$
$\ell \neq 0$	∞	∞ (**)
∞	∞	∞ (**)
0	∞	F.I.

3. Limite d'un quotient :

f	g	f/g
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell \neq 0$	0	∞ (**)
ℓ	∞	0
0	0	F.I.
∞	∞	F.I.

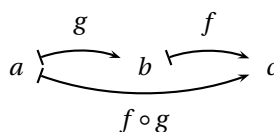
(**) Δ Règle des signes

2.2 Composée

Propriété 3 (Composition).

a , b et c sont des réels, éventuellement infinis.

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} f(X) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = c$.



■ Exemple 4:

Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

3 Théorèmes

3.1 Comparaison

Théorème 1 (De comparaison).

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $] \alpha ; +\infty[$ de $\mathbb{R}$.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots$

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $] -\infty ; \beta[$ de $\mathbb{R}$.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots\dots$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots\dots$

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $] \alpha ; \beta[$ de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in] \alpha ; \beta[$.

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \dots\dots$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \dots\dots$

3.2 Gendarmes

Théorème 2 (Des gendarmes (sandwich)).

Soit a et ℓ deux réels, et trois fonctions f , g et h telles que pour tout $x \geq a$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$$

■ Exemple 5:

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x}$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$