PRÉNOM : **NOM :**

Calculatrices autorisées. Tous les étudiants doivent traiter les exercices 1 à 6.

Ceux issus de la filière générale (avec EDS Terminale), doivent traiter en plus les exercices 7 et 8.

▶ Exercice 1 /2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(3x-4)(x^2-5x+4) \geqslant 0$

▶ Exercice 2 /4

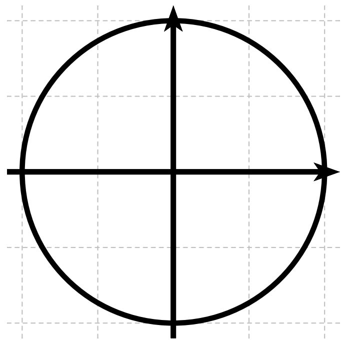
1. Développer et réduire les expressions suivantes :
   (a) $A(x) = (a+b+c)^2$
   (b) $B(x) = (2x-1)^3$
2. Factoriser les expressions suivantes :
   (a) $C(x) = (3x-4)(2x+1) + 9x^2 - 16$
   (b) $D(x) = 5x^2 - 7x - 6$

▶ Exercice 3 /4

Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre les points associés aux valeurs réelles suivantes :

$$\frac{3\pi}{4} \quad \frac{23\pi}{4} \quad -\frac{7\pi}{3} \quad \frac{2023\pi}{3}$$

$$\frac{75\pi}{6} \quad -\frac{13\pi}{2} \quad \frac{115\pi}{6} \quad \frac{80\pi}{3}$$



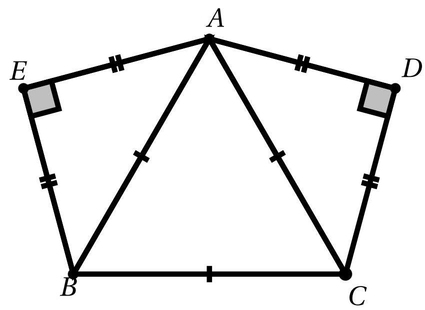
▶ Exercice 4 /3

1. Exprimer en fonction de $\cos x$ et/ou $\sin x$: $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) + 2\sin(2\pi + x)$
2. En utilisant les angles associés, déterminer la valeur de : $B = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

▶ Exercice 5 /3

En utilisant les données de la figure, déterminer les mesures principales des angles suivants :

1. $\left(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AC}\right)$
2. $\left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{EA}\right)$
3. $\left(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{BC}\right)$
4. $\left(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{CD}\right)$



▶ Exercice 6 /4

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos x = -\frac{1}{2}$
2. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos 3x = \frac{1}{2}$
4. $\cos(4x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$
5. En posant $X = \cos x$, $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

▶ Exercice 7

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$
2. (a) Démontrer que pour tous réels a et b,

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

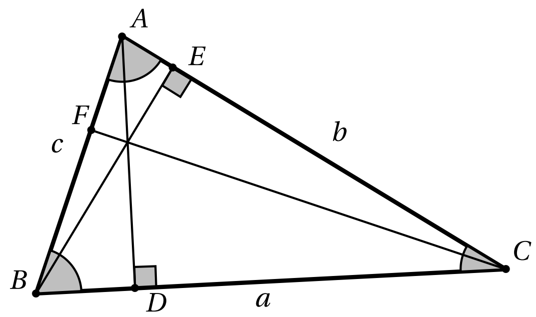
(b) En déduire que $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}$

indication : $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\dots$

► Exercice 8

Dans ce problème, on se propose de démontrer différentes formules de calcul d'aire d'un triangle.

On notera a, b et c les longueurs des côtés du triangle $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$ sont les hauteurs du triangle
On notera $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ les angles (non orientés) du triangle.
On notera S l'aire du triangle.



On rappelle que l'aire d'un triangle est égale à $\boxed{S=\frac{\text{Base}\times\text{hauteur}}{2}}$

On rappelle également la **formule d'Al-Kashi** :

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}}$$

1. **Formule 1 :**
   (a) Justifier que $AD=c\sin\widehat{B}$
   (b) En déduire que $\boxed{S=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}}$.
   (c) Justifier que $S=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}=\frac{1}{2}ba\sin\widehat{C}=\frac{1}{2}cb\sin\widehat{A}$.
2. **loi des sinus :**
   Déduire des questions précédentes que $\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}=\frac{abc}{2S}$
3. **Formule 2 :**
   (a) Exprimer $\widehat{A}$ en fonction de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
   (b) En déduire que $\sin(\widehat{A})=\sin(\widehat{B}+\widehat{C})$
   (c) En utilisant les questions 1 et 2, démontrer que $\boxed{S=\frac{a^2}{2}\times\frac{\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}}{\sin(\widehat{B}+\widehat{C})}}$
   (d) En déduire deux autres formules de calcul d'aire.
4. **Formule de Héron :**
   (a) Montrer que $\cos\widehat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ et $\sin\widehat{A}=\frac{2S}{bc}$.
   (b) En déduire que $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2+\frac{4S^2}{b^2c^2}=1$
   (c) En déduire que $16S^2=4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2$
   (d) Par des factorisations successives, démontrer que $16S^2=(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)$
   (e) Si on pose p le demi-périmètre du triangle ABC : $p=\frac{a+b+c}{2}$, prouver la formule de Héron :

$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

5. $\boxed{\textbf{AN}}$ Dans les trois cas suivants, calculer l'aire du triangle proposé (les longueurs sont données en cm et les angles en radians) :
   (a) ABC tel que $a=7$, $b=5$, $c=4$.
   (b) ABC tel que $a=6$, $c=5$, $\widehat{B}=\frac{\pi}{6}$.
   (c) ABC tel que $a=7$, $\widehat{B}=\frac{\pi}{6}$ et $\widehat{C}=\frac{\pi}{4}$