Corrigé partiel du T. D. A8
Limites et continuité

5 Démontrer l'équivalence : $1 - \cos u \underset{(0)}{\sim} \frac{u^2}{2}$

Dans les deux cas on utilise l'équivalence $\sin u \underset{(0)}{\sim} u$.

<u>Méthode 1.</u> Grâce à la formule $\cos u = 1 - 2\sin^2 \frac{u}{2}$:

$$1 - \cos u = 2\sin^2 \frac{u}{2} \underset{(0)}{\sim} 2\left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{u^2}{2}$$

<u>Méthode 2.</u> Par une quantité conjuguée :

$$1 - \cos u = \frac{1 - \cos^2 u}{1 + \cos u} = \frac{\sin^2 u}{1 + \cos u} \underset{(0)}{\sim} \frac{u^2}{2}$$

6 Démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha \underset{(0)}{=} 1 + \alpha x + o(x)$$

Cette égalité s'écrit $(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x \underset{(0)}{=} o(x)$ et donc revient à :

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} - \alpha \right) = 0$$

On écrit : $(1+x)^\alpha - 1 = e^{\alpha \ln(1+x)} - 1$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \alpha \ln(1+x) = 0$ et $e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$ alors :

$$e^{\alpha \ln(1+x)} - 1 \underset{(0)}{\sim} \alpha \ln(1+x)$$

Or $\ln(1+x) \underset{(0)}{\sim} x$ donc par transitivité :

$$e^{\alpha \ln(1+x)} - 1 \underset{(0)}{\sim} \alpha x$$

Ceci montre que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \alpha$$

On en déduit l'égalité à démontrer.

7 Calculer les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3-x^3}{4x^2-2x+1}$ b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\sqrt{x}+5}$ c. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x^3+x-2)^2}{(x-1)^6}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-\ln x}{\sqrt{x}+\ln x}$ e. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^5-1}$ f. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{3x^5-1}$

g. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4x-1}{3x+1}\right)^{(2x+3)}$ h. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\>}} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{(x-1)}$ i. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2x+\frac{\pi}{6})}{\sin(5x+\frac{\pi}{6})}$

j. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

a. $\displaystyle\frac{3-x^3}{4x^2-2x+1} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{-x^3}{4x^2} = -\frac{x}{4} \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

b. $\displaystyle\frac{2x}{x\sqrt{x}+5} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2x}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

c. $\displaystyle\frac{(3x^3+x-2)^2}{(x-1)^6} \underset{(-\infty)}{\sim} \frac{(3x^3)^2}{x^6} = 9 \underset{-\infty}{\longrightarrow} 9$

d. Par croissances comparées $\ln x \underset{(+\infty)}{=} o(\sqrt{x})$ donc $\displaystyle\frac{\sqrt{x}-\ln x}{\sqrt{x}+\ln x} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$

e. $\displaystyle\frac{e^x}{3x^5-1} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{e^x}{3x^5} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées.

f. $\displaystyle\frac{e^{-x}}{3x^5-1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ (Limite non indéterminée)

g. $\displaystyle\left(\frac{4x-1}{3x+1}\right)^{(2x+3)} = e^{(2x+3)\ln\frac{4x-1}{3x+1}}$

Comme $\displaystyle\frac{4x-1}{3x+1} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{4}{3}$ alors $\displaystyle(2x+3)\ln\frac{4x-1}{3x+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puis

$$\left(\frac{4x-1}{3x+1}\right)^{(2x+3)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

h. On pose $h = x-1$. Si x tend vers 1 par valeurs supérieures alors h tend vers 0 par valeurs positives, et : $\displaystyle\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{(x-1)} = \left(\frac{h}{h+2}\right)^{h} = e^{h\ln h - h\ln(h+2)}$

Par croissances comparées $h\ln h \underset{0}{\longrightarrow} 0$, et $h\ln(h+2) \underset{0}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{(x-1)} \underset{1}{\longrightarrow} e^0 = 1$$

i. On pose $h = x-\frac{\pi}{6}$. Alors $x = h+\frac{\pi}{6}$, si x tend vers $\frac{\pi}{6}$ alors h tend vers 0 et :

$$\frac{\cos(2x+\frac{\pi}{6})}{\sin(5x+\frac{\pi}{6})} = \frac{\cos(2h+\frac{\pi}{2})}{\sin(5h+\pi)} = \frac{-\sin 2h}{-\sin 5h} \underset{(0)}{\sim} \frac{2h}{5h} \underset{0}{\longrightarrow} \frac{2}{5}$$

j. On pose $h = \dfrac{1}{x}$. Si x tend vers $+\infty$ alors h tend vers 0, et :

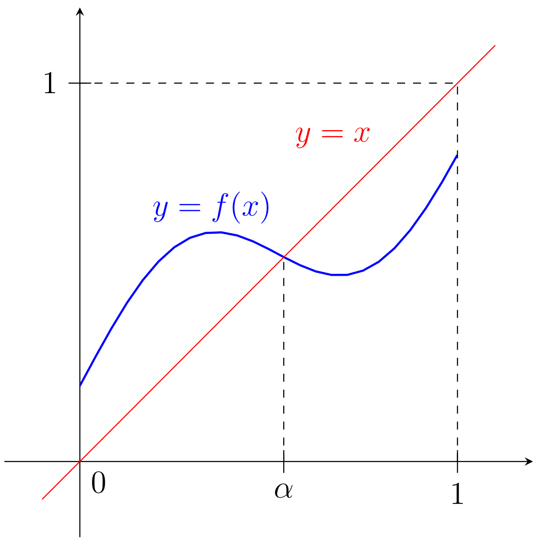
$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}} = \left(\frac{1}{1+h}\right)^{\frac{1}{h(h+1)}} = e^{\frac{1}{h(h+1)}\ln\frac{1}{1+h}} = e^{-\frac{\ln(1+h)}{h(h+1)}}$$

Comme $\ln(1+h) \underset{(0)}{\sim} h$ alors $-\dfrac{\ln(1+h)}{h(h+1)} \underset{(0)}{\sim} -\dfrac{1}{1+h} \underset{(0)}{\sim} -1$ donc

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$$

---

8 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.
Démontrer qu'il existe un réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.



On pose pour tout $x \in [0,1]$: $g(x) = f(x) - x$

La fonction f est continue, ainsi que la fonction $x \mapsto x$, donc par somme la fonction g est continue.

Comme f est à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ alors $f(0) \geqslant 0$ et $f(1) \leqslant 1$, donc $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$.

Ainsi :

- g est continue sur l'intervalle $[0,1]$,
- $g(0)$ et $g(1)$ sont de signes distincts.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Ceci donne $f(\alpha) = \alpha$.

9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant $-\infty$ pour limite en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Démontrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Méthode 1. Il est clair que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

Réciproquement, si A est un élément de $\mathbb{R}$ alors :

- Comme $\lim_{+\infty} f = +\infty$ alors il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) > A$.
- Comme $\lim_{-\infty} f = -\infty$ alors il existe $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_2) < A$.

Or f est continue sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe x_0 entre x_1 et x_2 tel que $f(x_0) = A$.

Tout réel A appartient à $f(\mathbb{R})$ donc $\mathbb{R} \subseteq f(\mathbb{R})$, et par double inclusion $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Méthode 2. Comme f est continue et $\mathbb{R}$ est un intervalle alors par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires $f(\mathbb{R})$ est un intervalle.

Cet intervalle n'est pas majoré car f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, ni minoré car f tend vers $-\infty$ en $-\infty$, donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

Démontrer que f est bornée.

Comme f tend vers 0 en $\pm\infty$ alors f est bornée aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

Il existe donc deux intervalles $]-\infty, A]$ et $[B, +\infty[$ sur lesquels $|f| \leqslant 1$.

L'image du segment $[A, B]$ est un segment $[m, M]$, donc f est bornée sur $[A, B]$.

Finalement f est bornée sur $\mathbb{R}$ car $\mathbb{R} =]-\infty, A] \cup [A, B] \cup [B, +\infty[$.

(11) Soit f une fonction continue et injective sur un intervalle I.

a. Énoncer en termes logiques la proposition : f n'est pas strictement monotone.

Soit a, b, c et d quatre éléments de I tels que $a < b$ et $c < d$, $f(a) \leqslant f(b)$ et $f(c) \geqslant f(d)$. On définit la fonction :

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(ta + (1-t)c) - f(tb + (1-t)d) \end{aligned}$$

b. Démontrer qu'il existe $\tau \in [0,1]$ tel que $g(\tau) = 0$.

c. En déduire une contradiction et conclure.

a. Par définition f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante, ce qui s'écrit :

$$\begin{array}{rllll} & (\forall (a,b) \in I^2 & a < b & \Longrightarrow & f(a) < f(b)) \\ \text{ou} & (\forall (a,b) \in I^2 & a < b & \Longrightarrow & f(a) > f(b)) \end{array}$$

La négation de cette proposition est :

$$\begin{array}{rllll} & (\exists (a,b) \in I^2 & a < b & \text{et} & f(a) \geqslant f(b)) \\ \text{et} & (\exists (a,b) \in I^2 & a < b & \text{et} & f(a) \leqslant f(b)) \end{array}$$

Comme a et b sont des variables muettes alors on peut écrire que f n'est pas strictement monotone si et seulement si :

$$\begin{array}{rllll} & (\exists (a,b) \in I^2 & a < b & \text{et} & f(a) \leqslant f(b)) \\ \text{et} & (\exists (c,d) \in I^2 & c < d & \text{et} & f(c) \geqslant f(d)) \end{array}$$

b. Tout d'abord on remarque que $ta + (1-t)c = c + t(a-c)$, comme $t \in [0,1]$ alors $ta + (1-t)c$ est entre a et c. Comme a et c sont dans l'intervalle I alors $ta + (1-t)c$ appartient aussi à I.

De même, $tb + (1-t)d$ appartient à I pour tout $t \in [0,1]$.

Ceci montre que la fonction g est bien définie.

De plus on calcule $g(0) = f(c) - f(d)$ et $g(1) = f(a) - f(b)$, donc $g(0) \geqslant 0$ et $g(1) \leqslant 0$.

La fonction g est continue par composition et somme, la fonction f étant supposée continue.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\tau \in [0,1]$ tel que $g(\tau) = 0$.

c. Comme $g(\tau) = 0$ alors :

$$f(\tau a + (1-\tau)c) = f(\tau b + (1-\tau)d)$$

Comme f est injective alors $\tau a + (1-\tau)c = \tau b + (1-\tau)d$, ce qui s'écrit :

$$(b-a)\tau + (d-c)(1-\tau) = 0$$

Or $a < b$, $c < d$ et $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, donc toutes ces quantités sont positives. Ainsi $(b-a)\tau = 0$ et $(d-c)(1-\tau) = 0$, puis $\tau = 0$ et $(1-\tau) = 0$ car $b-a$ et $d-c$ ne sont pas nuls. On obtient alors $\tau = 0$ et $\tau = 1$, ce qui est impossible.

Cette contradiction montre qu'il n'existe pas quatre éléments a, b, c et d de I tels que $a < b$, $c < d$, $f(a) \leqslant f(b)$ et $f(c) \geqslant f(d)$.

Ainsi f est strictement monotone.

12 Soit $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{e^{it}-1}{t} \end{array}$

Démontrer que f est continue et prolongeable par continuité en 0.

La forme algébrique de f est :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad f(t) = \frac{\cos t - 1}{t} + i\frac{\sin t}{t}$$

Les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont donc :

$$\operatorname{Re}(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\cos t - 1}{t} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\sin t}{t} \end{array}$$

Par quotient ces fonctions sont continues, donc f est continue.

Pour déterminer la limite de f en 0 on utilise les équivalences :

$$(\cos t - 1) \underset{(0)}{\sim} -\frac{t^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin t \underset{(0)}{\sim} t$$

Elles montrent que :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \left(-\frac{t}{2}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

On en déduit :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = i$$

On peut donc prolonger f par continuité en posant $f(0) = i$.

De plus on remarque que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{it}-1}{it} = 1$, ce qui donne l'équivalence $\quad e^{it} - 1 \underset{(0)}{\sim} it$.

Ainsi l'équivalence $\quad e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u \quad$ est valable aussi si u est imaginaire pur, et on peut aussi démontrer qu'elle est valable si u est complexe.

1 Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles continues ?

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{|x(x-1)|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^8-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 8 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$$

- Par composition de fonctions continues la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

  Par quotient de fonctions continues la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$.

  De plus :

  $$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{x\to 0} \ln(x+1) = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

  Donc f est continue en 0.

  Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction valeur absolue est continue, ainsi que les fonctions polynomiales, donc par quotient et composition la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$.

  Déterminons les limites à gauche et à droite de g en 0.

  Si $x \in]0,1[$ alors $(x-1) \in]-1,0[$, donc $x(x-1) < 0$, et ainsi $g(x) = \frac{-x(x-1)}{x} = 1-x$. Ceci montre que $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = 1$.

  Si $x \in]-\infty,0[$ alors $x < 0$ et $(x-1) < 0$, donc $x(x-1) > 0$, et ainsi $g(x) = \frac{x(x-1)}{x} = x-1$. Ceci montre que $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} g(x) = -1$.

  Or $g(0) = -1$, donc g est continue à gauche en 0, mais pas à droite.
- La fonction $x \mapsto \frac{x^8-1}{x-1}$ est continue sur $]1,+\infty[$ par quotient, et la fonction $x \mapsto 8$ est continue sur $]-\infty,1[$, donc la fonction h est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

  Comme h est constante que l'intervalle $]-\infty,1]$ alors elle est continue à gauche en 1. En effet $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} h(x) = 8 = h(1)$.

  Pour démontrer que $h(x)$ tend vers 8 lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures on peut écrire :

  $$\forall x > 1 \quad h(x) = \frac{(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1} = (x^4+1)(x^2+1)(x+1)$$

  Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} h(x) = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

  On peut aussi remarquer que la fonction $g : x \mapsto x^8$ est dérivable de dérivée $x \mapsto 8x^7$, donc en particulier en $x = 1$:

  $$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) \qquad \text{donne} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^8-1}{x-1} = 8$$

  La fonction h admet 8 pour limite en 1 à gauche et à droite, et $h(1) = 8$, donc h est continue en 1.

  Finalement h est continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes. Déterminer ensuite sur quel ensemble elles sont prolongeables par continuité.

$$f_1(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \qquad\qquad f_2(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2-2x-3}$$

$$f_3(x) = \frac{\ln(4x^2-1)}{\ln(2x-1)} \qquad\qquad f_4(x) = \frac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\tan x - 1}$$

On rappelle qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point si et seulement si elle admet une limite finie en ce point.

- La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}^*$, continue par quotient et composition.

  Calculons sa limite en 0. La fonction exponentielle admet pour limites 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$, donc :

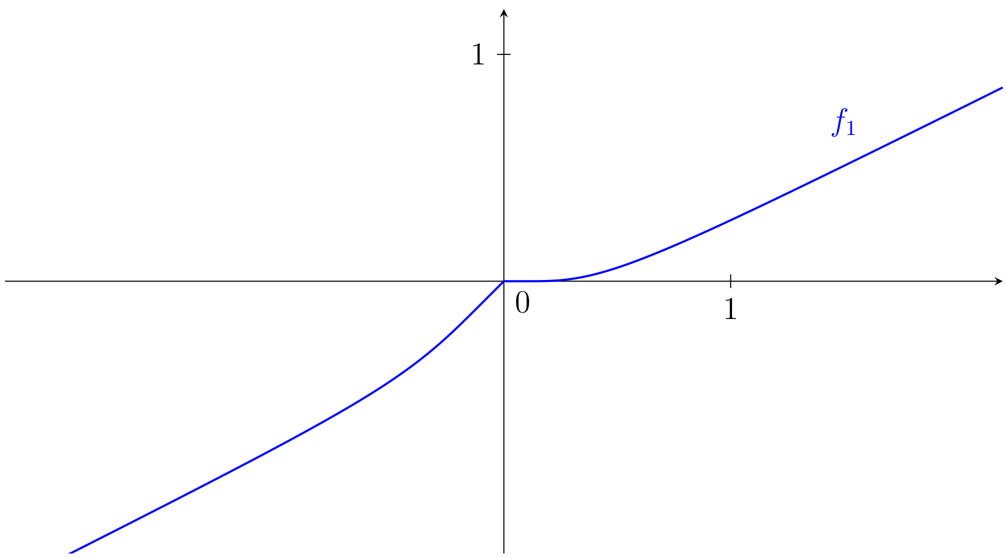
  $$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} e^{\frac{1}{x}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

  Par quotient de limites :

  $$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f_1(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f_1(x) = 0$$

  On en déduit que la fonction f_1 admet 0 pour limite en 0, et donc elle est prolongeable par continuité en 0, en posant $f_1(0) = 0$.

  L'allure de la courbe de f_1 est la suivante.

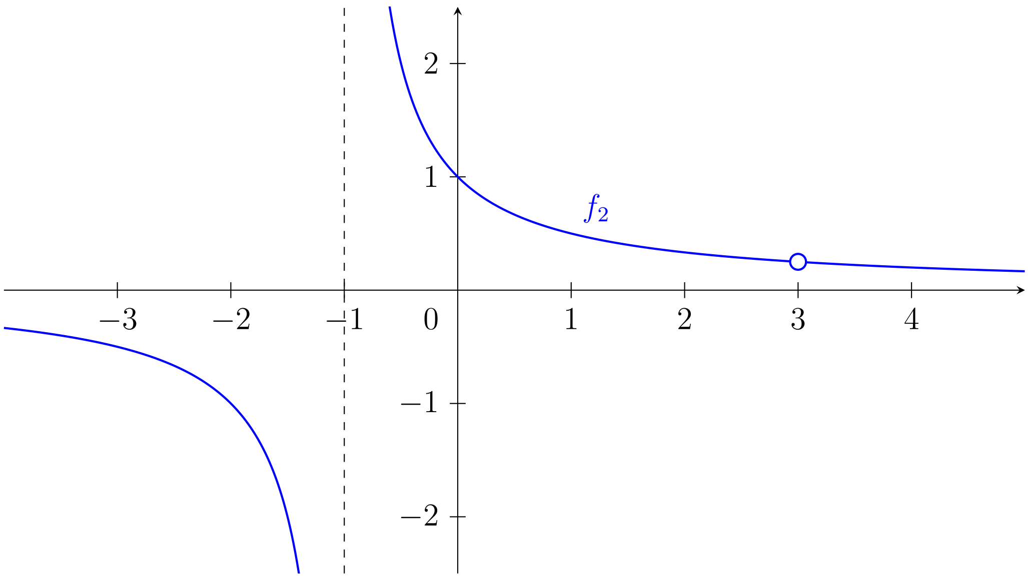


  Nous pourrons vérifier qu'elle n'est pas dérivable en 0.

- Comme $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ alors la fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. On peut simplifier son expression :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\} \qquad f_2(x) = \frac{x+1}{(x+1)(x-3)} - \frac{4}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{x+1}$$

  Ceci montre que la fonction f_2 n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers -1, mais qu'elle tend vers $\frac{1}{4}$ lorsque x tend vers 3.
  On peut donc la prolonger par continuité sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, en posant $f_2(3) = \frac{1}{4}$.
  L'allure de la courbe de f_2 est la suivante.



- La fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\ln(4x^2-1)}{\ln(2x-1)}$ est définie sur $\mathcal{D}_3 = \left]\frac{1}{2}, 1\right[\cup]1, +\infty[$.
  Pour calculer ses limites on écrit :

$$\forall x \in \mathcal{D}_3 \qquad f_3(x) = \frac{\ln(2x-1) + \ln(2x+1)}{\ln(2x-1)} = 1 + \frac{\ln(2x+1)}{\ln(2x-1)}$$

  Ceci montre que $\lim_{x \to 1} f_3(x) = \pm\infty$, donc f_3 n'est pas prolongeable par continuité en $x = 1$.
  Ceci donne également $\lim_{h \to 0} f_3(h + \frac{1}{2}) = 1$ donc on peut prolonger f par continuité en $x = \frac{1}{2}$, en posant $f_3(\frac{1}{2}) = 1$.

- La fonction $f_4 : \frac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\tan x - 1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.
  Elle est périodique de période 2π. On étudie donc ses limites aux points $\pm\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$.
  Lorsque x tend vers $\pm\frac{\pi}{2}$ elle tend vers 0, donc on peut la prolonger en posant : $f(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$.
  Lorsque x tend vers $\frac{5\pi}{4}$ elle tend vers $\pm\infty$, selon que la limite soit à gauche ou à droite, donc on ne peut pas la prolonger par continuité en ce point.
  Calculons enfin la limite de f_4 lorsque x tend vers $\frac{\pi}{4}$, en posant $h = x - \frac{\pi}{4}$.

$$f_4(x) = f_4(h + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}\sin(h + \frac{\pi}{4}) - 1}{\tan(h + \frac{\pi}{4}) - 1} = \frac{\sin h + \cos h - 1}{\frac{2\tan h}{1 - \tan h}}$$

  Comme $\tan h \underset{(0)}{\sim} h$ et $1 - \tan h \underset{(0)}{\sim} 1$ alors :

$$f(h + \tfrac{\pi}{4}) \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin h}{h} + \frac{\cos h - 1}{h}\right)$$

  On sait que lorsque h tend vers 0 : $\frac{\sin h}{h} \to 1$ et $\frac{\cos h - 1}{h} \to 0$.
  On en déduit : $\lim\limits_{h \to 0} f_4(h + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$
  On prolonge donc par continuité la fonction f_4 en posant $f_4(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.
  Finalement on a prolongé f_4 par continuité en posant :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad f(\tfrac{\pi}{2} + k\pi) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_4(\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi) = \tfrac{1}{2}$$

  La fonction ainsi prolongée est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3 Calculer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x-4}-\sqrt{x^2-4x+2}$

c. $\lim\limits_{x\to 1} (1+\ln x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x-1}{\ln(x+1)}$ e. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{(\cos 2x)(\cos x-\sin x)}}{x-\frac{\pi}{4}}$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\operatorname{ch} 2x)\ln(\operatorname{th} x)$ g. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{sh} 2x}$ h. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sin\sqrt{x}\right)\ln 2x$

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x\ln^2 x$ j. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{sh}\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)}{x}$ k. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\tan x)^{\sin x}$

l. $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{\sin 3x}{\cos\frac{x}{4}}$ m. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2}-x$ n. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$

o. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}$ p. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x-1}{x^2 e^x}$ q. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^x}{a^{x^2}}$ $(a>1)$

r. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$ s. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln^5 x-\sqrt{x}$

t. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\tan 6x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$ u. $\lim\limits_{x\to\pi} (1+\sin x)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}}$ v. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ $(a>0)$

w. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ x. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{\lfloor x^2\rfloor}$ y. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)}$

z. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$

a. L'encadrement $x-1<\lfloor x\rfloor \leqslant x$ montre que :

$$\forall x>0 \qquad 1-\frac{1}{x}<\frac{\lfloor x\rfloor}{x}\leqslant 1$$

Par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}=1$

Ceci montre que $\lfloor x\rfloor$ est équivalente à x au voisinage de $+\infty$, ce qui est assez intuitif.

b. Par quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2+3x-4}-\sqrt{x^2-4x+2}=\frac{7x-6}{\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x^2-4x+2}}$$

Si x est au voisinage de $-\infty$ alors x est négatif, donc $\sqrt{x^2}=|x|=-x$, ce qui donne :

$$\sqrt{x^2+3x-4}-\sqrt{x^2-4x+2}=\frac{7x-6}{-x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x-4}-\sqrt{x^2-4x+2}=-\frac{7}{2}$

c. Tout d'abord on écrit : $(1+\ln x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(1+\ln x)}$

On pose ensuite $h = x-1$. Alors $x = 1+h$ et h tend vers 0 lorsque x tend vers 1, puis :

$$\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(1+\ln x) = \tan\left(\frac{\pi h}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\ln\left(1+\ln(1+h)\right)$$

D'une part :

$$\tan\left(\frac{\pi h}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi h}{2}\right)} \underset{(0)}{\sim} -\frac{1}{\left(\frac{\pi h}{2}\right)} = -\frac{2}{\pi h}$$

D'autre part, comme $\ln(1+h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0 alors :

$$\ln\left(1+\ln(1+h)\right) \underset{(0)}{\sim} \ln(1+h) \underset{(0)}{\sim} h$$

On en déduit :

$$\tan\left(\frac{\pi h}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\ln\left(1+\ln(1+h)\right) \underset{(0)}{\sim} -\frac{2}{\pi}$$

Finalement : $\lim\limits_{x\to 1}(1+\ln x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{-\frac{2}{\pi}}$

d. Par équivalences usuelles : $\dfrac{5^x-1}{\ln(x+1)} = \dfrac{e^{x\ln 5}-1}{\ln(1+x)} \underset{(0)}{\sim} \dfrac{x\ln 5}{x} = \ln 5$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{\ln(x+1)} = \ln 5.$

i. On écrit : $\dfrac{x\ln^2 x}{x^2} = \dfrac{\ln^2 x}{x}$

Par croissances comparées $\ln^2 x \underset{(+\infty)}{=} o(x)$ donc $x\ln^2 x \underset{(+\infty)}{=} o(x^2)$ et ainsi :

$$x^2 - x\ln^2 x \underset{(+\infty)}{\sim} x^2$$

Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 - x\ln^2 x\right) = +\infty.$

l. On pose $h = x-2\pi$. Alors $x = h+2\pi$, et h tend vers 0 lorsque x tend vers 2π. On calcule :

$$\frac{\sin 3x}{\cos\frac{x}{4}} = \frac{\sin(3h+6\pi)}{\cos\left(\frac{h}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin 3h}{-\sin\frac{h}{4}} \underset{(0)}{\sim} \frac{3h}{-\frac{h}{4}} = -12$$

En conclusion : $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 3x}{\cos\frac{x}{4}} = -12$

m. Grâce à l'équivalence $e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$:

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} - x = x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right) = x\left(e^{\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - 1\right)$$

$$\underset{(+\infty)}{\sim} x\left(\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

On obtient donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2} - x = \dfrac{1}{3}$

n. En posant $h = \frac{1}{x}$ on obtient :

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = e^{\frac{1}{h}\ln\frac{1}{h}\ln\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{h}\right)}{\ln\frac{1}{h}}\right)}$$

On calcule :

$$\frac{1}{h}\ln\frac{1}{h}\ln\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{h}\right)}{\ln\frac{1}{h}}\right) = -\frac{\ln h}{h}\ln\left(\frac{\ln(1+h)-\ln h}{-\ln h}\right) = -\frac{\ln h}{h}\ln\left(1-\frac{\ln(1+h)}{\ln h}\right)$$

Comme $\frac{\ln(1+h)}{\ln h} \underset{0}{\longrightarrow} 0$ alors :

$$-\frac{\ln h}{h}\ln\left(1-\frac{\ln(1+h)}{\ln h}\right) \underset{(0)}{\sim} -\frac{\ln h}{h}\left(-\frac{\ln(1+h)}{\ln h}\right) = \frac{\ln(1+h)}{h} \underset{(0)}{\sim} 1$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = e$

o. On écrit : $x^2 e^{-\sqrt{x}} = e^{2\ln x - \sqrt{x}}$

Par croissances comparées $\ln x \underset{(+\infty)}{=} o(\sqrt{x})$ donc $(2\ln x - \sqrt{x}) \underset{(+\infty)}{\sim} -\sqrt{x}$.

On en conclut : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} = 0$

En d'autres termes : $x^2 \underset{(0)}{=} o\left(e^{\sqrt{x}}\right)$

On aurait aussi pu utiliser le changement de variable $y = \sqrt{x}$:

Par croissances comparées : $y^4 \underset{(0)}{=} o(e^y)$

q. On écrit :

$$\frac{x^x}{a^{x^2}} = e^{x\ln x - x^2\ln a}$$

Par croissances comparées $x\ln x \underset{(+\infty)}{=} x^2$ donc $x\ln x - x^2\ln a \underset{(+\infty)}{\sim} -x^2\ln a$.

Comme $a > 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln a = +\infty$ puis : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^x}{a^{x^2}} = 0$

s. Par croissances comparées $\ln^5 x \underset{(+\infty)}{=} o(\sqrt{x})$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln^5 x - \sqrt{x}\right) = -\infty$

w. On écrit : $\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = e^{\ln^2 x - x\ln(\ln x)}$

Comme $\ln(\ln x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $x \underset{(+\infty)}{=} o(x\ln(\ln x))$.

Par croissances comparées : $\ln^2 x \underset{(+\infty)}{=} o(x)$.

Par transitivité : $\ln^2 x \underset{(+\infty)}{=} o(x\ln(\ln x))$, puis $\ln^2 x - x\ln(\ln x) \underset{(+\infty)}{\sim} -x\ln(\ln x)$.

Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = 0$

z. Posons $h = x - \frac{1}{2}$. Alors :

$$\left(2x^2 - 3x + 1\right)\tan(\pi x) = \left(2h^2 - h\right) \times \frac{-1}{\tan(\pi h)} \underset{(0)}{\sim} -\frac{h(2h-1)}{\pi h} \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{\pi}$$

Ceci donne : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x) = \frac{1}{\pi}$

$\boxed{5}$ a. Si x est un réel strictement positif, calculer :

$$\lim_{t\to 0} \frac{x^t - 1}{t}$$

b. Soit z un nombre complexe non-nul de module r et d'argument θ. Démontrer que la limite

$$\ell = \lim_{t\to 0} \frac{r^t e^{i\theta t} - 1}{t}$$

existe et la calculer. Que vaut e^ℓ ?

---

a. L'équivalence usuelle $e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$ donne :

$$\frac{x^t - 1}{t} = \frac{e^{t\ln x} - 1}{t} \underset{(t\to 0)}{\sim} \frac{t\ln x}{t} = \ln x$$

On en déduit : $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{x^t - 1}{t} = \ln x$

b. On souhaite calculer la limite d'une fonction complexe. Pour ceci on calcule les limites des parties réelles et imaginaires. On écrit d'abord :

$$\frac{r^t e^{i\theta t} - 1}{t} = \frac{r^t\cos\theta t - 1}{t} + ir^t\frac{\sin\theta t}{t}$$

Comme $r > 0$ alors $\lim_{t\to 0} r^t = 1$ puis l'équivalence usuelle $\sin u \underset{(0)}{\sim} u$ donne :

$$r^t\frac{\sin\theta t}{t} \underset{(t\to 0)}{\sim} \frac{\theta t}{t} = \theta$$

On en déduit : $\lim\limits_{t\to 0} r^t\dfrac{\sin\theta t}{t} = \theta$

Pour la limite de la partie réelle il faut introduire des termes :

$$\frac{r^t\cos\theta t - 1}{t} = \frac{r^t\cos\theta t - r^t + r^t - 1}{t} = r^t\frac{\cos\theta t - 1}{t} + \frac{r^t - 1}{t}$$

L'équivalence usuelle $1 - \cos u \underset{(0)}{\sim} \frac{u^2}{2}$ donne :

$$r^t\frac{\cos\theta t - 1}{t} \underset{(t\to 0)}{\sim} -\frac{(\theta t)^2}{2t} = -\frac{\theta^2 t}{2}$$

On en déduit : $\lim\limits_{t\to 0} r^t \dfrac{\cos\theta t - 1}{t} = 0$

En suite grâce à la question précédente : $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{r^t - 1}{t} = \ln r$

Finalement :

$$\lim_{t\to 0} \frac{r^t e^{i\theta t} - 1}{t} = \ln r + i\theta$$

On remarque que $e^\ell = re^{i\theta} = z$, ce qui montre que ℓ pourrait être défini comme la logarithme népérien du complexe z. Mais cette définition n'est pas correcte, car elle dépend du choix de l'argument θ de z.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Étudier la continuité de :

$$f : x \to \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

La fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lfloor x \rfloor \leqslant x$
Ceci montre que $x - \lfloor x \rfloor$ est positif pour tout réel x, donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, donc par soustraction, composition et addition la fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

On étudie maintenant la continuité en un point de $\mathbb{Z}$.
Soit n un entier : $n \in \mathbb{Z}$.
Si $x \in [n, n+1[$ alors $\lfloor x \rfloor = n$, donc $f(x) = n + \sqrt{x - n}$. Ceci montre que :

$$\lim_{\substack{x\to n \\ >}} f(x) = n$$

Si $x \in [n-1, n[$ alors $\lfloor x \rfloor = n - 1$, donc $f(x) = n - 1 + \sqrt{x - n + 1}$. Ceci montre que :

$$\lim_{\substack{x\to n \\ <}} f(x) = n$$

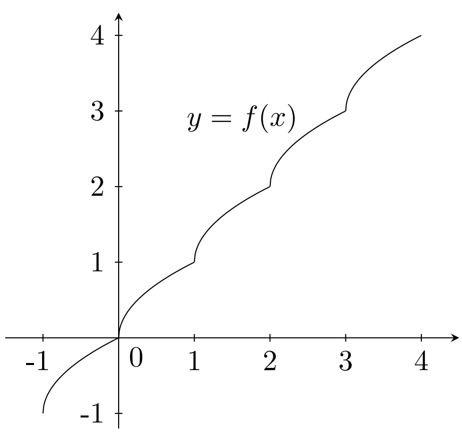
De plus $f(n) = n$, et donc on constate donc que :

$$\lim_{\substack{x\to n \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to n \\ <}} f(x) = f(n)$$

La fonction f est donc continue en n.

Ceci est valable pour tout n de $\mathbb{Z}$, donc finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

On peut représenter f de la façon suivante :



$\boxed{7}$ Donner des équivalents simples au point a indiqué de chacune des fonctions suivantes.

a. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^3}$ en $a = 0$

b. $f(x) = \frac{e^{\sin x}-1}{\cos x-1}$ en $a = 0$

c. $f(x) = \frac{\sin(nx)\cos(mx)}{\tan x}$ en $a = 0$ $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$

d. $f(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^3}$ en $a = 0$ puis en $a = +\infty$

e. $f(x) = \tan x$ en $a = \frac{\pi}{2}$

f. $f(x) = x^{\sin x} - 1$ en $a = 0^+$

g. $g(x) = \cos\sqrt{x} - 1$ en $a = 0^+$

h. $h(x) = x^{\sin x} - \cos\sqrt{x}$ en $a = 0^+$

i. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $a = 0$ puis $a = 1$

j. $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}$ en $a = +\infty$

a. Grâce à l'équivalence $\sin u \underset{(0)}{\sim} u$: $\dfrac{\sin^2 x}{x^3} \underset{(0)}{\sim} \dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{1}{x}$

b. Grâce aux équivalences $e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$ et $1 - \cos u \underset{(0)}{\sim} \frac{u^2}{2}$:

$$\frac{e^{\sin x} - 1}{\cos x - 1} \underset{(0)}{\sim} \frac{\sin x}{-\frac{x^2}{2}} \underset{(0)}{\sim} -\frac{2}{x}$$

c. De même : $\dfrac{\sin(nx)\cos(mx)}{\tan x} \underset{(0)}{\sim} \dfrac{(nx)\times 1}{x} = n$

d. En 0 : $\dfrac{\ln x}{(x+1)^3} \underset{(0)}{\sim} \dfrac{\ln x}{1^3} = \ln x$ En $+\infty$: $\dfrac{\ln x}{(x+1)^3} \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^3}$

e. On pose $h = x - \frac{\pi}{2}$. Alors $x = h + \frac{\pi}{2}$ et :

$$\tan x = \tan\left(h + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan h} \underset{(0)}{\sim} -\frac{1}{h}$$

On en déduit : $\tan x \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$

Ceci peut être visualisé grâce au schéma de la figure 1.

f. On obtient : $f(x) \underset{(0^+)}{\sim} x\ln x$

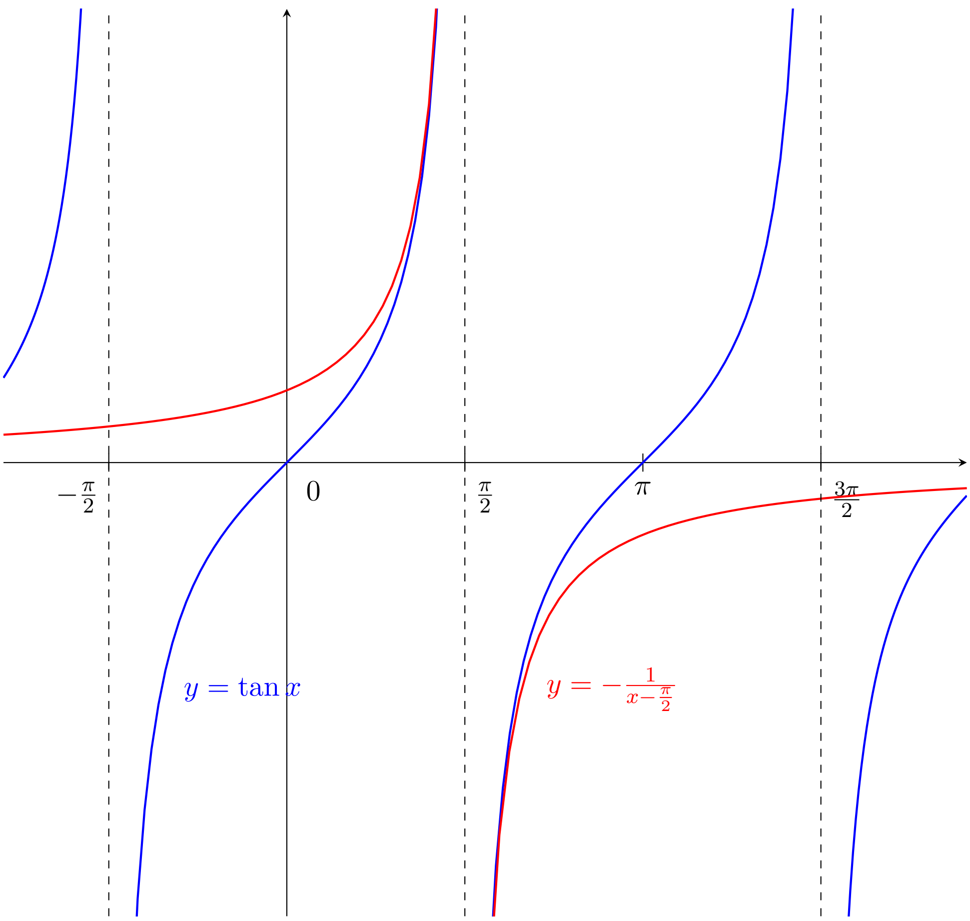
g. On obtient : $f(x) \underset{(0^+)}{\sim} -\frac{x}{2}$

h. On obtient : $f(x) \underset{(0^+)}{\sim} x\ln x$

i. On obtient : $f(x) \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{x}$ et $f(x) \underset{(1)}{\sim} -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

j. On obtient : $f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

Figure 1 – Équivalence de la tangente en $\frac{\pi}{2}$



$\boxed{8}$ Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, g ne s'annulant pas. On suppose que f et g sont équivalentes en a et que f est strictement positive.

a. Démontrer qu'il existe un voisinage de a sur lequel f et g sont strictement positives.

b. Démontrer que si f est bornée au voisinage de a alors g est bornée au voisinage de a.

c. Soit α un réel. Démontrer que f^α et g^α sont équivalentes au voisinage de a.

d. Démontrer que si f est bornée alors e^f et e^g sont équivalentes en a.

e. Démontrer que si f tend vers $+\infty$ en a alors $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalentes en a.

a. Soit I un voisinage de a sur lequel f et g sont définies.
Comme f et g sont équivalentes en a alors $\lim_a \frac{f}{g} = 1$.
Il existe donc un voisinage V_1 de a sur lequel $\frac{f}{g} \geqslant \frac{1}{2}$.
En effet, par définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in I$:

$$x \in V \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, comme $\varepsilon > 0$ alors il existe un voisinage V_0 de a tel que :

$$x \in V_0 \qquad \Longrightarrow \qquad -\varepsilon \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \leqslant \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 1 - \varepsilon = \frac{1}{2}$$

La fonction $\frac{f}{g}$ est strictement positive sur le voisinage V_0 de a.
Or f est strictement positive, donc g est aussi strictement positive.

b. On considère le même voisinage V_0 que ci-dessus. Pour tout $x \in I$:

$$x \in V_0 \qquad \Longrightarrow \qquad -\varepsilon \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \leqslant \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \frac{3}{2}$$

Comme g est strictement positive alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \frac{3}{2} \qquad &\Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}g(x) \\ &\Longrightarrow \qquad \frac{2}{3}f(x) \leqslant g(x) \leqslant 2f(x) \end{aligned}$$

Soit m et M un minorant et un majorant de f. Alors :

$$\forall x \in V_0 \qquad \frac{2}{3}m \leqslant g(x) \leqslant 2M$$

Ceci montre que g est bornée au voisinage de a.

c. Si f et g sont équivalentes en a alors $\lim_a \frac{f}{g} = 1$. On en déduit :

$$\lim_a \frac{f^\alpha}{g^\alpha} = \lim_a \left(\frac{f}{g}\right)^\alpha = 1$$

Donc f^α et g^α sont équivalentes au voisinage de a.

d. On écrit : $\dfrac{e^f}{e^g} = e^{f-g}$

Si f et g sont équivalentes alors $f-g$ ne tend pas nécessairement vers 0, donc il n'est pas vrai en général que e^f et e^g sont équivalentes.

Si f est bornée alors g est bornée au voisinage de a d'après la question b.

On peut écrire : $f - g = g\left(\dfrac{f}{g} - 1\right)$

Comme $f \sim g$ alors $\frac{f}{g}-1$ tend vers 0, et comme g est bornée alors par produit $g\left(\frac{f}{g}-1\right)$ tend vers 0. On en déduit $\lim_a \frac{e^f}{e^g} = e^0 = 1$, donc les fonctions e^f et e^g sont équivalentes au voisinage de a.

Contre-exemple. Soit $f(x) = x+1$ et $g(x) = x$.

Alors f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$. Par contre $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e$, cette fonction ne tend pas vers 1 lorsque a tend vers $+\infty$ donc $e^{f(x)}$ et $e^{g(x)}$ ne sont pas équivalentes au voisinage de $+\infty$.

e. On a supposé que f et g sont équivalentes au voisinage de a, donc que $\lim_a \frac{f}{g} = 1$.

On souhaite démontrer que si $\lim_a f = +\infty$ alors les fonctions $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalentes au voisinage de a, donc que $\lim_a \frac{\ln f}{\ln g} = 1$.

On peut écrire :

$$\forall x \in I \qquad \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)} g(x)\right)}{\ln g(x)} = \frac{\ln \frac{f(x)}{g(x)} + \ln g(x)}{\ln g(x)} = 1 + \frac{\ln \frac{f(x)}{g(x)}}{\ln g(x)}$$

Comme $\lim_a f = +\infty$ et $f \underset{(a)}{\sim} g$ alors $\lim_a g = +\infty$.

Comme $\lim_a \frac{f}{g} = 1$ alors $\lim_a \ln \frac{f}{g} = 0$. On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = 1$

Ainsi les fonctions $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalentes au voisinage de a.

Contre-exemple. Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.

Alors f et g sont équivalentes au voisinage de 1, car $\frac{f(x)}{g(x)} = x \underset{1}{\longrightarrow} 1$.

Mais $\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = \frac{\ln(x^2)}{\ln x} = \ln 2$, cette fonction ne tend pas vers 1 lorsque x tend vers 1.

Les fonctions $\ln f$ et $\ln g$ ne sont donc pas équivalentes au voisinage de 1.

9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Soit $a = f(1)$.

a. Déterminer $f(0)$.
b. Calculer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c. Calculer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
d. Calculer $f(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
e. Démontrer que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a. Pour $x = y = 0$ on obtient $f(0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.

b. On démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = an$

Initialisation. On a justifié dans la question précédente que $f(0) = 0$.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = an$.

Alors $f(n+1) = f(n) + f(1) = an + a = a(n+1)$.

Conclusion. Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = an$

c. Soit n un entier négatif. Alors $-n$ est un entier naturel, donc d'après la question précédente $f(-n) = -an$.

De plus $f(n) + f(-n) = f(0) = 0$, donc $f(n) = -f(-n) = an$.

On a donc démontré que : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n) = an$

d. Soit x un réel quelconque. De même que dans la question b on démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(nx) = nf(x)$

Soit $r = \frac{p}{q}$ un rationnel, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$. Alors $f(qr) = qf(r)$ d'après ce qui précède.

Ceci donne $f(p) = qf(r)$. Comme p est entier alors $f(p) = ap$, donc $f(r) = \frac{ap}{q} = ar$.

On a donc démonté que : $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = ar$

e. Soit x un réel quelconque.

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels convergeant vers x.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(r_n) = ar_n$.

Comme f est continue alors : $f(\lim r_n) = \lim f(r_n)$

Ceci donne $f(x) = \lim(ar_n)$, donc par produit $f(x) = a \lim r_n = ax$.

On a donc démontré que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax$

10 On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin \frac{1}{x} \end{array}$

a. Soit $u_n = \frac{1}{n\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Donner les limites de (u_n) et de $f(u_n)$.

b. Déterminer une suite (v_n) tendant vers 0 telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(v_n) = 1$

c. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

a. La suite (u_n) converge vers 0 et la suite $(f(u_n))$ converge vers 0 car elle est constante égale à 0. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(u_n) = \sin(n\pi) = 0$.

b. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$.

Alors la suite (v_n) converge vers 0, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(v_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$.

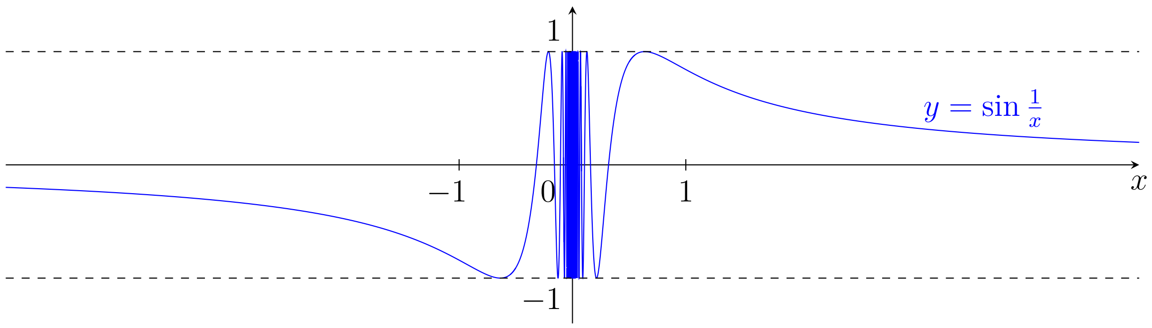
c. On raisonne par l'absurde, en supposant que la fonction f admet une limite en 0, et on note ℓ celle-ci, avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Comme les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0 alors par composition les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ convergent vers cette limite ℓ.

Or la suite $(f(u_n))$ converge vers 0 et la suite $(f(v_n))$ converge vers 1, ce qui donne $\ell = 0 = 1$ par unicité de la limite.

Cette contradiction montre que f n'admet pas de limite en 0.

La courbe de f est la suivante :



11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) = f(x)$$

Démontrer que f est constante.

Indication : étudier les $f(\frac{x}{2^n})$, $n \in \mathbb{N}$.

La relation $f(2x) = f(x)$ donne, en remplaçant x par $\frac{x}{2}$: $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$.

Soit x un réel quelconque fixé. On démontre par récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$

La suite $\left(\frac{x}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et la fonction f est continue en 0 donc par composition de limites la suite $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(0)$.

Or la suite $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $f(x)$.

On en déduit $f(x) = f(0)$, et comme ceci est vrai pour tout réel x alors f est constante.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. Soit K un réel.
On dit que f est K-lipschitzienne si :

$$\forall (x,y) \in D^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que f est K-lipschitzienne.

a. Démontrer que si f est lipschitzienne alors f est continue.

b. En considérant la fonction carré démontrer que la réciproque est fausse.

c. Démontrer que si f est dérivable et lipschitzienne alors sa dérivée est bornée.

Remarquons que si f est K-lipschitzienne alors K est positif, comme on peut le voir avec l'inégalité ci-dessus dans le cas où $(x,y) = (1,0)$.

a. Soit K un réel tel que f est K-lipschitzienne.

Soit a un point de D. Alors :

$$\forall x \in D \qquad |f(x) - f(a)| \leqslant K|x-a| \tag{1}$$

Par théorème d'encadrement, comme $\lim\limits_{x\to a} |x-a| = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - f(a)| = 0$, et donc :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Ainsi f est continue en a, et comme ceci est vrai pour tout $a \in D$ alors f est continue sur D.

b. Soit f la fonction carré de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Supposons que f est K-lipschitzienne pour un certain réel K. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f(x) - f(0)| \leqslant K|x-0|$$

Ceci donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 \leqslant K|x|$$

Pour $x = K+1$ elle donne $(K+1)^2 \leqslant K(K+1)$, donc $K+1 \leqslant K$, ce qui est une absurdité. Donc f n'est pas lipschitzienne.

Ainsi il existe une fonction continue non lipschitzienne.

c. Soit f dérivable et K-lipschitzienne pour un certain réel K.

Soit a un élément de D. L'inégalité (1) donne :

$$\forall x \in D \setminus \{a\} \qquad \left|\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right| \leqslant K$$

Comme f est dérivable en a alors le membre de gauche tend vers $f'(a)$ lorsque x tend vers a, et donc par théorème de comparaison :

$$\lim_{x\to a} \left|\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right| = \lim_{x\to a} K \qquad \text{puis} \qquad |f'(a)| \leqslant K$$

Ceci montre que la fonction $|f'|$ est majorée par K, donc f' est bornée.

13 Cet exercice fait suite au précédent.

Une fonction f est dite contractante si elle est K-lipschitzienne pour un réel $K \in [0,1[$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction contractante.

a. Soit $g = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(0) - K|x| - x \leqslant g(x) \leqslant f(0) + K|x| - x$$

En déduire les limites de g en $\pm\infty$.

b. Démontrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.

c. Démontrer que ce point fixe est unique.

d. Soit (u_n) une suite telle : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

Démonter que cette suite converge vers le point fixe de f.

a. Comme f est K-lipschitzienne alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|f(x) - f(0)| \leqslant K|x|$.

Ceci donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(0) - K|x| \leqslant f(x) \leqslant f(0) + K|x|$$

On en déduit bien :

$$f(0) - K|x| - x \leqslant g(x) \leqslant f(0) + K|x| - x$$

Si x est positif alors $|x| = x$ donc :

$$\forall x \geqslant 0 \qquad g(x) \leqslant f(0) - (1-K)x$$

Comme $K \in [0,1[$ alors $(1-K) > 0$ et donc par théorème de comparaison g tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

De même g tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

b. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Par somme g est continue, donc l'image de $\mathbb{R}$ par g est un intervalle. D'après la question précédente il n'est ni minoré ni majoré, donc $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il admet un antécédent par g, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

c. Soit α et β deux points fixes de f. Alors $f(\alpha) = \alpha$ et $f(\beta) = \beta$. Or :

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \leqslant K|\alpha - \beta|$$

Ceci donne $|\alpha - \beta| \leqslant K|\alpha - \beta|$. Si $|\alpha - \beta|$ n'est pas nul alors $1 \leqslant K$, alors que K est supposé strictement inférieur à 1. Cette contradiction montre que $\alpha = \beta$.

d. Comme f est K-lipschitzienne, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant K|u_n - \alpha|$$

On démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leqslant K^n |u_0 - \alpha|$

Comme $|K| < 1$ alors $(K^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, par théorème d'encadrement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

14 Soit a, b deux réels tels que $a < b$.

a. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Démontrer que f possède un point fixe.

b. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$5f(c) = 2f(a) + 3f(b)$$

a. On pose pour tout $x \in [a, b]$: $\quad g(x) = f(x) - x$

La fonction f est continue, ainsi que la fonction $x \mapsto x$, donc par somme la fonction g est continue.

Comme f est à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$ alors $f(a) \geqslant a$ et $f(b) \leqslant b$, donc $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$.

Ainsi :

- g est continue sur l'intervalle $[a, b]$,
- $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes distincts.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Ceci donne $f(\alpha) = \alpha$.

b. Pour tout $x \in [a, b]$ on pose :

$$g(x) = 5f(x) - 2f(a) - 3f(b)$$

La fonction g est continue car f est continue.

On calcule $g(a) = 3(f(a) - f(b))$ et $g(b) = 2(f(b) - f(a))$, donc $g(b) = -\frac{3}{2}g(a)$, ce qui montre que $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes opposés.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, ce qui donne $5f(c) = 2f(a) + 3f(b)$.

15 Démontrer que :

a. Il existe une infinité de réels x tels que $\tan x = x$.

b. Il existe une infinité de réels x tels que $\cos x = e^x$.

a. La fonction $f : x \mapsto \tan x - x$ est définie et continue sur le domaine de définition de la tangente, donc sur chaque intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Ses limites sur chacun de ces intervalles sont $-\infty$ et $+\infty$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'image de chacun de ces intervalles est $\mathbb{R}$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$ il existe $x_n \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x_n = x_n$.

Les x_n sont distincts car les intervalles sont disjoints.

b. Soit $f(x) = \cos x - e^x$. Alors f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(-2n\pi) = 1 - e^{-2n\pi} > 0$ et $f((-2n-1)\pi) = -1 - e^{-(2n+1)\pi} < 0$.

On conclut grâce au théorème des valeurs intermédiaires.

18 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue non constante telle que $f(a) = f(b)$.
Soit y un élément non extremum de $f([a,b])$.
Démontrer que y admet au moins deux antécédents par f.

Par énoncé $y \in]m, M[$.

Si $y > f(a)$ alors $M > f(a)$, soit c un antécédent de M. On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.

Si $y < f(a)$ on procède de même avec un antécédent de m.

20 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue et périodique.

a. Démontrer que f est bornée.

b. On suppose que f admet une limite en $+\infty$. Que dire de f ?
Indication : utiliser une suite.

Soit T une période de f. Alors $T > 0$.

a. Comme f est continue et $[0,T]$ est un segment alors f est bornée sur $[0,T]$.
Comme f est périodique de période T alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ les valeurs de f sur l'intervalle $[nT, (n+1)T]$ sont les mêmes que sur l'intervalle $[0,T]$. Donc f est bornée sur $[nT, (n+1)T]$.
Ainsi f et bornée sur $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [nT, (n+1)T]$ donc sur $\mathbb{R}$.

b. Soit ℓ la limite de f en $+\infty$.
Soit x un réel, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = x + nT$. Comme f est T-périodique alors $f(u_n) = f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
De plus $\lim u_n = +\infty$ donc par composition de limites $\lim f(u_n) = \ell$. Or la suite $f(u_n)$ est constante égale à $f(x)$ donc $f(x) = \ell$.
La fonction f est donc constante égale à ℓ.

21 Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $f > g$.

a. Démontrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que :
$$\forall x \in [0,1] \qquad f(x) \geqslant g(x) + a$$

b. Montrer que ce résultat est faux si on remplace $[0,1]$ par $]0,1]$.

a. Soit $h = f - g$. Alors h est continue et strictement positive sur $[0,1]$.
Comme $[0,1]$ est un segment alors h est bornée sur ce segment est atteint son minimum. Soit a ce minimum. Il existe donc $x_0 \in [0,1]$ tel que $h(x_0) = a$. Comme $h > 0$ alors $a > 0$. Pour tout $x \in [0,1]$ on a $h(x) \geqslant h(x_0) = a$, donc $f(x) \geqslant g(x) + a$.

b. Soit $f(x) = x$ et $g(x) = 0$. Alors $f(x) > g(x)$ sur $]0,1]$, mais on n'a pas $f(x) \geqslant g(x) + a$ pour un $a > 0$ car $f(x) - g(x) = x \in]0,1]$.

$\boxed{22}$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a. Démontrer que si $f(0) < 0$ et f admet une limite strictement positive en $+\infty$ alors il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(c) = 0$.

b. Démontrer que si f tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ alors f admet un minimum.

c. Démontrer que si f tend vers 0 en $\pm\infty$ et f prend au moins une valeur strictement positive et une valeur strictement négative alors f est bornée et atteint ses bornes.

a. Méthode 1. Soit $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Par hypothèse $\ell > 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors par définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists B \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (x \geqslant B \implies \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon)$$

En particulier pour $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, on obtient qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(x \geqslant b \implies f(x) \geqslant \tfrac{\ell}{2}\right)$$

Comme $f(0) < 0$ alors $b > 0$. En effet, si $b < 0$ alors l'implication ci-dessus montre qye $f(0) \geqslant \frac{\ell}{2}$, ce qui est faux.

Par contre, comme $b \geqslant b$ alors $f(b) \geqslant \frac{\ell}{2}$, et donc $f(b) > 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme

- f est continue sur l'intervalle $[0, b]$,
- $f(0) < 0$ et $f(b) > 0$,

alors il existe $c \in]0, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Méthode 2. Par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. En conséquence $f(\mathbb{R}_+)$ est un intervalle.

Comme $f(0) < 0$ alors cet intervalle contient au moins un réel strictement négatif.

Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) > 0$ alors cet intervalle contient au moins un réel strictement positif.

En effet, si $f(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathbb{R}_-$ alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) < 0$. Ceci donne par théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \leqslant 0$, ce qui est faux.

L'intervalle $f(\mathbb{R}_+)$ contient un réel positif et un réel négatif, c'est un intervalle, donc il contient 0.

Ainsi il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(c) = 0$.

b. Soit $A = f(0) + 1$.

Comme $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$ alors il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall x \leqslant a \quad f(x) \geqslant A \qquad \text{et} \qquad \forall x \geqslant b \quad f(x) \geqslant A$$

Ainsi f est minorée par A sur le voisinage $]-\infty, a]$ de $-\infty$ et le voisinage $[b, +\infty[$ de $+\infty$.

Ces deux voisinages ne contiennent pas 0, donc $[a, b]$ est non-vide. Comme f est continue alors son image par f est un segment $[m, M]$.

De plus $m \leqslant f(0) < A$ donc m minore f sur $\mathbb{R}$ et m est atteint.

c. Soit a et b deux réels tels que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{f(a), -f(b)\}$.

Comme $f(a)$ et $-f(b)$ sont strictement positifs, alors ε est strictement positif : $\varepsilon > 0$

Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ et $\varepsilon > 0$ alors par définition de la limite :

$$\begin{array}{llll} \exists c \in \mathbb{R} & \forall x \in \mathbb{R} & x \leqslant c \implies & |f(x)| \leqslant \varepsilon \\ \exists d \in \mathbb{R} & \forall x \in \mathbb{R} & x \geqslant d \implies & |f(x)| \leqslant \varepsilon \end{array}$$

On sait que $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}f(a)$ et $\varepsilon \leqslant -\frac{1}{2}f(b)$. On en déduit : $\frac{1}{2}f(b) \leqslant -\varepsilon$ et $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}f(a)$

Ainsi pour tout réel x :

$$x \in \left]-\infty, c\right] \cup \left[d, +\infty\right[\qquad \frac{1}{2}f(b) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}f(a)$$

Ceci montre que a et b n'appartiennent pas à l'ensemble $]-\infty, c] \cup [d, +\infty[$, donc $a \in [c, d]$ et $b \in [c, d]$.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment, f est continue, donc $f([a, d])$ est un segment, que nous notons $[m, M]$.

Comme a et b appartiennent au segment $[c, d]$ alors :

$$m \leqslant f(b) < 0 < f(a) \leqslant M$$

On en déduit, pour tout réel x :

$$\begin{array}{llll} \text{Si} & x \in \left]-\infty, c\right] \cup \left[d, +\infty\right[& \text{alors} & m \leqslant f(b) < \frac{1}{2}f(b) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}f(a) < f(a) \leqslant M \\ \text{Si} & x \in [c, d] & \text{alors} & m \leqslant f(x) \leqslant M \end{array}$$

La fonction f est donc bornée sur $\mathbb{R}$. Comme m et M appartiennent à l'image du segment $[c, d]$ par f alors il existe deux réels x_1 et x_2 dans ce segment tels que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$.

Donc f est bornée et atteint ses bornes.

23 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$$

Démontrer que f est bijective.

Si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$, donc f est injective.

Or f est continue. Par théorème, comme f est continue et injective sur l'intervalle $\mathbb{R}$ alors f est strictement monotone.

Si f est croissante alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (x \geqslant 0 \implies f(x) \geqslant f(0) + x) \quad \text{et} \quad (x \leqslant 0 \implies f(x) \leqslant f(0) + x)$$

Si f est décroissante alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (x \geqslant 0 \implies f(x) \leqslant f(0) - x) \quad \text{et} \quad (x \leqslant 0 \implies f(x) \geqslant f(0) - x)$$

Dans les deux cas les limites en $\pm\infty$ sont $\pm\infty$.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, et ainsi f est surjective.

En conclusion f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

24 Soit a, b, c, d quatre réels tels que $a < b$ et $c < d$. Soit $f : [a, b] \to [c, d]$ croissante et surjective.
Démontrer que f est continue.
On pourra utiliser la théorème de la limite monotone.

On démontre que f et continue à gauche, la démonstration de la continuité à droite est similaire.
Soit $x_0 \in]a, b]$, et $y_0 = f(x_0)$.
La fonction f est croissante majorée sur $[a, x_0[$, donc elle admet une limite finie ℓ à gauche en x_0, et cette limite est la borne supérieure de f sur l'intervalle $[a, x_0[$:

$$\ell = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \operatorname{Sup}_{[a,x_0[} f$$

On a alors $c \leqslant \ell \leqslant y_0$.
En effet par croissance de f :

$$\forall x \in [a, x_0] \qquad f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)$$

Comme $f(a) \in [c, d]$ alors $f(a) \geqslant c$, et donc $c \leqslant f(x) \leqslant y_0$, ce qui donne par théorème de comparaison $c \leqslant \ell \leqslant y_0$.
On suppose que $\ell < y_0$ et on pose $y_1 = \frac{\ell + y_0}{2}$.
Alors $y_1 \in [c, y_0] \subseteq [c, d]$. Comme f est surjective alors y_1 admet un antécédent x_1 par f.
Si $x_1 < x_0$ alors $f(x_1) \leqslant \ell$ car ℓ est la borne supérieure de f sur l'intervalle $[a, x_0[$.
Si $x_1 \geqslant x_0$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_0) = y_0$ par croissance de f.
Or $f(x_1) = y_1 = \frac{\ell + y_0}{2}$, donc $\ell < y_1 < y_0$. Dans les deux cas on obtient une contradiction.
Cette contradiction montre que $\ell = y_0$, donc $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$.

Ainsi f est continue à gauche en x_0.
Ceci est valable pour tout $x_0 \in]a, b]$, donc f est continue à gauche sur $[a, b]$.
On démontre de même que f est continue à droite sur $[a, b]$, donc finalement f est continue.