Devoir à la Maison n°13

Soit α un réel non-nul. Le but de ce devoir est de démontrer que α et e^α ne peuvent être tous les deux rationnels.

Soit n un entier naturel. On note :

$$P_n = X^n(1-X)^n \qquad \text{puis} \qquad L_n = \frac{1}{n!}P_n^{(n)}.$$

On suppose pour l'instant que α est strictement positif, et on pose :

$$I_n = \int_0^1 e^{\alpha t} L_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Démontrer par récurrence finie que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$I_n = \frac{(-\alpha)^k}{n!}\int_0^1 e^{\alpha t} P_n^{(n-k)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (b) Démontrer que I_n est non-nulle.

   (c) Justifier que pour tout $t \in [0,1]$: $\quad t(1-t) \leqslant \frac{1}{4}$.

   En déduire que :

$$|I_n| \leqslant \frac{e^\alpha}{n!}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^n.$$

2. En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n+k}{n} X^k.$$

3. Dans cette question on démontre que si α est un entier strictement positif, alors e^α est irrationnel. On suppose donc $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose $J_k = \displaystyle\int_0^1 e^{\alpha t} t^k\,\mathrm{d}t$.

   (a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$J_k = \frac{1}{\alpha}(e^\alpha - kJ_{k-1}).$$

   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe deux entiers a_k et b_k tels que :

$$J_k = \frac{1}{\alpha^{k+1}}(a_k + b_k e^\alpha).$$

   (c) Démontrer qu'il existe deux entiers c_n et d_n tels que :

$$I_n = \frac{1}{\alpha^{n+1}}(c_n + d_n e^\alpha).$$

(d) On suppose de plus que e^α est rationnel : $e^\alpha = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
Démontrer que :
$$|I_n| \geqslant \frac{1}{q\alpha^{n+1}}.$$

(e) En déduire une contradiction et conclure la question.

4. (a) Démontrer que si α est un rationnel non-nul alors e^α est irrationnel.
Justifier que ceci revient à dire que si α est un réel non-nul alors α et e^α ne peuvent être tous les deux rationnels.

(b) Démontrer que si α est rationnel strictement positif alors $\ln \alpha$ est irrationnel.