Corrigé du Devoir Surveillé n°7

Exercice 1.

(9 points)

1. (a) *(1 point)* Soit n le degré de P . Comme P est non-nul alors n est un entier naturel. Si $n = 0$ alors P est constant non-nul, P' est nul donc il ne divise pas P .
Donc n est un entier strictement positif, et P' est de degré $n - 1$.
Comme P' divise P alors il existe un polynôme Q tels que $P = QP'$, et le degré de Q est $\deg Q = \deg P - \deg P' = 1$.
Comme Q est de degré 1 alors il existe deux scalaires λ et α , avec λ non-nul, tels que $Q = \lambda(X - \alpha)$, et alors $P = \lambda(X - \alpha)P'$.
On peut ajouter que λ n'est pas nul.

- (b) *(1 point)* Comme $(X - \alpha)$ divise P alors α est racine de P .
Soit m l'ordre de multiplicité de α en tant que racine de P . Alors m est un entier strictement positif car α est racine de P .
Par propriété il existe alors un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)^m Q$ avec $Q(\alpha)$ non-nul.

- (c) *(2 points)* Comme $P = (X - \alpha)^m Q$ alors par dérivation :

$$P' = m(X - \alpha)^{m-1}Q + (X - \alpha)^m Q'$$

L'égalité $P = \lambda(X - \alpha)P'$ donne :

$$(X - \alpha)^m Q = \lambda m(X - \alpha)^m Q + \lambda(X - \alpha)^{m+1} Q'$$

Comme $(X - \alpha)^m$ n'est pas le polynôme nul alors :

$$Q = \lambda m Q + \lambda(X - \alpha) Q' \tag{1}$$

En spécialisant en α on obtient $Q(\alpha) = \lambda m Q(\alpha)$, et comme $Q(\alpha)$ est non-nul alors $\lambda m = 1$, donc $\lambda = \frac{1}{m}$.

L'équation (1) donne alors $\lambda(X - \alpha)Q' = 0$. Comme λ et $(X - \alpha)$ sont non-nuls alors $Q' = 0$.

- (d) *(1 point)* Comme $Q' = 0$ alors Q est un polynôme constant, donc $Q = a$ où a est un scalaire.

Ainsi $P = a(X - \alpha)^m$ où a et α sont deux scalaires et m est un entier strictement positif.

Si $a = 0$ alors on obtient le polynôme nul, qui satisfait l'assertion « P' divise P ».

Réciproquement si $P = a(X - \alpha)^m$ où a et α sont deux scalaires et m est un entier strictement positif, alors $P' = am(X - \alpha)^{m-1}$, ce polynôme divise bien P .

L'ensemble des polynômes P tels que P' divise P est donc :

$$\left\{ a(X - \alpha)^m \mid (a, \alpha) \in \mathbb{K}^2, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

2. (a) (1 point) Comme $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont racines de P alors leurs ordres de multiplicité sont des entiers strictement positifs, *i.e.*, les m_i sont éléments de $\mathbb{N}^*$.

Par propriété chaque α_i est racine de P' d'ordre de multiplicité $m_i - 1$, donc il existe un polynôme R tel que $P' = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i - 1} R$

On peut ajouter que les α_i ne sont pas racines de R .

(b) (2 points) Soit n le degré de P . Comme P est non-nul alors n est un entier.

Comme les racines de P sont $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, d'ordres de multiplicité $m_1, \dots, m_r$, alors $\sum_{i=1}^r m_i = n$. L'égalité $P' = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i - 1} R$ donne alors :

$$\deg P' = \sum_{i=1}^r \deg \left((X - \alpha_i)^{m_i - 1} \right) + \deg R = \sum_{i=1}^r (m_i - 1) + \deg R$$

On en déduit :

$$n - 1 = \sum_{i=1}^r m_i - r + \deg R = n - r + \deg R$$

En conséquence $\deg R = r - 1$. Comme P possède au moins deux racines distinctes alors $r \geq 2$ donc R est de degré au moins 1.

Comme R est de degré au moins 1 alors d'après le théorème de d'Alembert-Gauss R possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Soit β une telle racine.

Comme les α_i ne sont pas racines de R alors β est différent des α_i , et donc β n'est pas une racine de P .

Ainsi β est racine de R , et $P' = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i - 1} R$ donc β est racine de P' .

On a démontré que P' possède une racine distincte de celles de P .

(c) (1 point) Soit P un polynôme non-nul tel que P' divise P .

Supposons que P possède au moins deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$. Alors d'après la question précédente P' possède une racine β qui n'est pas racine de P . Ceci montre que $(X - \beta)$ divise P' , puis par transitivité $(X - \beta)$ divise P , ce qui est une absurdité car β n'est pas racine de P .

Cette contradiction montre que P ne peut posséder plus d'une racine.

Si P ne possède pas de racine alors P est une constante non-nulle donc P' ne divise pas P .

Ainsi P possède exactement une racine, donc $P = a(X - \alpha)^m$ où a et α sont deux scalaires et m est un entier strictement positif.

Exercice 2.

(12 points)

1. (1 point) Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors sa dérivée seconde f'' est continue. Une fonction continue sur un segment est bornée donc f'' est bornée sur le segment $[0, 1]$, et ainsi il existe un majorant M de $|f''|$ sur $[0, 1]$.
2. (a) (1 point) Par définition de g_x :

$$g_x(x) = f(x) - xf'(0) - x^2A$$

Comme x est supposé non-nul alors on peut poser :

$$A = \frac{1}{x^2}(f(x) - xf'(0))$$

Ceci donne bien $g_x(x) = 0$.

- (b) (2 points) La fonction f est supposée de classe $\mathcal{C}^2$. La fonction $t \mapsto tf'(0) + t^2A$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$. Par différence la fonction g_x est de classe $\mathcal{C}^2$.

On calcule que $g_x(0) = f(0)$, comme $f(0) = 0$ alors $g_x(0) = 0$. Ainsi :

- La fonction g_x est continue sur $[0, x]$
- La fonction g_x est dérivable sur $]0, x[$.
- $g_x(0) = g_x(x)$.

D'après le théorème de Rolle il existe $d \in]0, x[$ tel que $g'_x(d) = 0$.

La dérivée de g_x est :

$$\forall x \in [0, 1] \quad g'_x(t) = f'(t) - f'(0) - 2tA$$

Ceci montre que $g'_x(0) = 0$. Comme g_x est de classe $\mathcal{C}^2$ alors g'_x est de classe $\mathcal{C}^1$ donc :

- La fonction g'_x est continue sur $[0, d]$
- La fonction g'_x est dérivable sur $]0, d[$.
- $g'_x(0) = g'_x(d)$.

D'après le théorème de Rolle il existe $c_x \in]0, d[$ tel que $g''_x(c_x) = 0$.

Comme $d \in]0, x[$ et $c_x \in]0, d[$ alors $c_x \in]0, x[$.

- (c) (1 point) La dérivée seconde de g_x est :

$$\forall t \in [0, 1] \quad g''_x(t) = f''(t) - 2A$$

Comme $g''_x(c_x) = 0$ alors $f''(c_x) = 2A$. D'après la question 1 $|f''(c_x)| \leq M$, donc $|A| \leq \frac{M}{2}$, et comme $A = \frac{1}{x^2}(f(x) - xf'(0))$ alors :

$$|f(x) - xf'(0)| \leq M \frac{x^2}{2}$$

Ce résultat est valable pour tout $x \in]0, 1]$.

Il est aussi valable pour $x = 0$ car $f(0) = 0$.

3. (a) (1 point) Les fonctions f et $x \mapsto M\frac{x^2}{2}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ donc par somme et soustraction φ et ψ sont deux fois dérivables. Leurs dérivées successives sont :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1] \quad \varphi(x) &= f(x) - M\frac{x^2}{2} & \psi(x) &= f(x) + M\frac{x^2}{2} \\ \varphi'(x) &= f'(x) - Mx & \psi'(x) &= f'(x) + Mx \\ \varphi''(x) &= f''(x) - M & \psi''(x) &= f''(x) + M \end{aligned}$$

Comme M est un majorant de $|f''|$ alors $-M \leq f'' \leq M$, donc :

$$\forall x \in [0, 1] \quad \varphi''(x) \leq 0 \quad \text{et} \quad \psi''(x) \geq 0$$

On en déduit par théorème que φ est concave et ψ est convexe.

- (b) (2 points) Par définition les tangentes aux courbes de φ et de ψ en 0 admettent pour équations :

$$y = \varphi'(0)(x - 0) + \varphi(0) \quad \text{et} \quad y = \psi'(0)(x - 0) + \psi(0)$$

Ceci donne $y = f'(0)x$ dans les deux cas.

Comme la fonction φ est concave alors sa courbe est en-dessous de ses tangentes et comme la fonction ψ est convexe alors sa courbe est au-dessus de ses tangentes, donc :

$$\forall x \in [0, 1] \quad \varphi(x) \leq f'(0)x \leq \psi(x)$$

Ceci donne :

$$\forall x \in [0, 1] \quad -M\frac{x^2}{2} \leq f(x) - f'(0)x \leq M\frac{x^2}{2}$$

On retrouve le résultat précédent : $\forall x \in [0, 1] \quad |f(x) - xf'(0)| \leq M\frac{x^2}{2}$.

4. (a) (2 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$u_n - f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} = \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0) \frac{k}{n^2} \right)$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0) \frac{k}{n^2} \right) \right| \leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n^2} - f'(0) \frac{k}{n^2} \right|$$

Si $k \in \{0, \dots, n\}$ alors $0 \leq \frac{k}{n^2} \leq 1$ donc on peut appliquer l'inégalité démontrée dans les questions précédentes :

$$\forall k = 0, \dots, n \quad \left| \frac{k}{n^2} - f'(0) \frac{k}{n^2} \right| \leq M \frac{k^2}{2n^4}$$

On en déduit, par somme d'inégalité et transitivité de la somme :

$$\left| u_n - f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \right| \leq \sum_{k=0}^n M \frac{k^2}{2n^4}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n M \frac{k^2}{2n^4} &= \frac{M}{2n^4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{M(n+1)(2n+1)}{12n^3} \\ &\leq \frac{M(n+n)(2n+n)}{12n^3} = \frac{M}{2n} \end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left| u_n - f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \right| \leq \frac{M}{2n}$$

(b) (1 point) Par théorème d'encadrement, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{2n} = 0$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n - f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \right) = 0$$

Comme $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} = \frac{f'(0)}{2}$.

Par somme de limites la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{f'(0)}{2}$.

5. (1 point) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$.

Alors : $\ln a_n = \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$.

Soit $f(x) = \ln(1+x)$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, et elle vérifie $f(0) = 0$.

On peut donc appliquer ce qui précède : la suite $(\ln a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{f'(0)}{2}$.

Comme $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ alors $f'(0) = 1$, et donc la suite $(\ln a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

La fonction exponentielle est continue donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Problème : Dérivées successives de l'arc-tangente (23 points)

Partie A. Définitions et premières propriétés des P_n (9 points)

1. (2 points) Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}.$$

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. La fonction $f = \arctan$ est dérivable de dérivée $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, donc la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie en posant $P_1 = 1$, qui est bien un polynôme.

Hérédité. Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$

Cette fonction est quotient de fonctions polynomiales donc elle est dérivable, de dérivée :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n+1)}(x) &= \frac{P'_n(x)(1+x^2)^n - 2nxP_n(x)(1+x^2)^{n-1}}{(1+x^2)^{2n}} \\ &= \frac{P'_n(x)(1+x^2) - 2nxP_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} \end{aligned}$$

Soit : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P_{n+1}(x) = (1+x^2)P'_n(x) - 2nxP_n(x)$

Comme $x \mapsto P_n(x)$ est une fonction polynomiale alors $x \mapsto P_{n+1}(x)$ est une fonction polynomiale, et on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie, ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

De plus on a obtenu la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+1} = (1+X^2)P'_n - 2nXP_n$$

2. (a) (2 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note maintenant $\mathcal{P}_n$ la propriété : il existe un entier a_n non-nul et un polynôme Q_n de degré inférieur ou égal à $n-2$ tels que $P_n = a_nX^{n-1} + Q_n$.

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. On sait que $P_1 = 1$. Pour $a_1 = 1$ et $Q_1 = 0$ on obtient bien $P_1 = a_1X^0 + Q_1$ avec a_1 entier non-nul et Q_1 polynôme de degré inférieur ou égal à -1 , puisque le polynôme nul est degré $-\infty$.

Hérédité. Supposons que la propriété est vraie pour un certain entier $n \geq 1$.

La relation de la question précédente donne alors :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (1+X^2)(a_nX^{n-1} + Q_n)' - 2nX(a_nX^{n-1} + Q_n) \\ &= (1+X^2)(a_n(n-1)X^{n-2} + Q'_n) - 2na_nX^n - 2nXQ_n \\ &= -(n+1)a_nX^n + ((n-1)a_nX^{n-2} + (1+X^2)Q'_n - 2nXQ_n) \end{aligned}$$

On pose $a_{n+1} = -(n+1)a_n$. Par hypothèse de récurrence a_n est un entier non-nul, donc a_{n+1} est un entier non-nul.

On pose $Q_{n+1} = (n-1)a_nX^{n-2} + (1+X^2)Q'_n - 2nXQ_n$.

Comme Q_n est un polynôme alors Q_{n+1} est un polynôme. Son degré vérifie :

$$\deg Q_{n+1} \leq \text{Max} \left\{ \deg \left((n-1)a_nX^{n-2} \right), \deg \left((1+X^2)Q'_n \right), \deg \left(2nXQ_n \right) \right\}$$

Comme $\deg Q_n \leq n-2$ par hypothèse de récurrence alors $\deg Q'_n \leq n-3$ puis :

$$\begin{aligned} \deg \left((n-1)a_nX^{n-2} \right) &\leq n-2 \\ \deg \left((1+X^2)Q'_n \right) &= \deg(1+X^2) + \deg Q'_n \leq 2 + (n-3) = n-1 \\ \deg (2nXQ_n) &= \deg(2nX) + \deg Q_n \leq 1 + (n-2) = n-1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\deg Q_{n+1} \leq \text{Max} \{n-2, n-1\} = n-1$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie. Ceci prouve l'hérédité.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) (1 point) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente $P_n = a_nX^{n-1} + Q_n$ avec a_n entier non-nul et Q_n polynôme de degré inférieur ou égal à $n-2$.

Comme a_n est non-nul alors a_nX^{n-1} est de degré $n-1$, donc Q_n est de degré strictement inférieur à a_nX^{n-1} .

On en déduit que P_n est de degré $n-1$, et son coefficient dominant est a_n .

On a démontré dans la question précédente que :

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} = -(n+1)a_n$$

Par récurrence immédiate on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = (-1)^{n-1}n!$

Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme P_n est degré $n-1$ et son coefficient dominant est $a_n = (-1)^{n-1}n!$.

3. (2 points) Comme $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ alors $g(x) = 1$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(n)}(x) = 0$$

Posons $a(x) = (1+x^2)$. Alors $g(x) = a(x)f'(x)$, et d'après la formule de Leibniz :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{(k)}(x) f^{(n-k+1)}(x)$$

Les dérivées successives de a sont :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad a^{(0)}(x) &= 1+x^2 & a^{(1)}(x) &= 2x & a^{(2)}(x) &= 2 \\ \text{et} \quad \forall k > 2 & & a^{(k)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Soit $n \geq 2$. On sait que $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(n)}(x) = (1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x)$$

Comme $g^{(n)} = 0$ si $n \geq 1$ alors :

$$\forall n \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1+x^2) \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}} + 2nx \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n} + n(n-1) \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n-1}} = 0$$

La formule pour $f^{(n-1)}$ n'est pas valable pour $n = 1$ donc cette dernière propriété n'est pas valable si $n = 1$, encore que si $n = 1$ alors $n(n-1) = 0$.

On en déduit en multipliant par $(1+x^2)^n$:

$$\forall n \geq 2 \quad P_{n+1} + 2nXP_n + n(n-1)(1+X^2)P_{n-1} = 0$$

4. (2 points) On a obtenu dans la question 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+1} = (1+X^2)P'_n - 2nXP_n \quad (2)$$

En plaçant cette expression de P_{n+1} dans l'égalité de la question précédente on obtient :

$$\forall n \geq 2 \quad (1+X^2)P'_n + n(n-1)(1+X^2)P_{n-1} = 0$$

Comme $(1+X^2)$ n'est pas le polynôme nul alors :

$$P'_n = -n(n-1)P_{n-1}$$

Cette relation est valable pour tout entier $n \geq 2$ donc en décalant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P'_{n+1} = -n(n+1)P_n \quad (3)$$

Il s'agit de la première relation à démontrer.

Par dérivation la relation (2) donne :

$$P'_{n+1} = (1+X^2)P''_n - 2(n-1)XP'_n - 2nP_n$$

Grâce à la relation (3) on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1+X^2)P''_n - 2(n-1)XP'_n + n(n-1)P_n = 0$$

Il s'agit de la seconde relation à démontrer.

Partie B. Racines de P_n

(10 points)

1. (a) (1 point) Soit $i \in \{1, \dots, k-1\}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc :

- φ est continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$,
- φ est dérivable sur $] \alpha_i, \alpha_{i+1} [$,
- $\varphi(\alpha_i) = \varphi(\alpha_{i+1})$.

D'après le théorème de Rolle il existe $\beta_i \in] \alpha_i, \alpha_{i+1} [$ tel que $\varphi'(\beta_i) = 0$.

On a donc prouvé qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ tels que $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_{k-1} < \alpha_k$ et $\varphi'(\beta_1) = \dots = \varphi'(\beta_{k-1}) = 0$.

(b) (2 points) Supposons que φ' ne s'annule pas sur $] -\infty, \alpha_1 [$.

Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors φ' est continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires si φ' prend deux valeurs de signes opposés sur l'intervalle $] -\infty, \alpha_1 [$ alors elle s'annule sur cet intervalle. Or on a supposé qu'elle ne s'annule pas précisément sur cet intervalle. Cette contradiction montre que φ' est de signe constant sur $] -\infty, \alpha_1 [$, et donc φ est monotone sur cet intervalle.

Comme φ est monotone sur cet intervalle alors d'après le théorème de la limite monotone elle admet des limites en $-\infty$ et en α_1 , et ces limites sont ses bornes, inférieure et supérieure.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha_1} \varphi(x) = \varphi(\alpha_1) = 0$ car φ est continue. Ainsi φ est majorée et minorée par 0 sur l'intervalle $] -\infty, \alpha_1 [$, donc elle est constante.

Si φ est constante sur l'intervalle $] -\infty, \alpha_1 [$ alors φ' est nulle, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

On a donc démontré par l'absurde que φ' s'annule sur l'intervalle $] -\infty, \alpha_1 [$: il existe $\beta_0 < \alpha_1$ tel que $\varphi'(\beta_0) = 0$.

Comme $\varphi(\alpha_k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ alors on démontre de la même façon qu'il existe $\beta_k > \alpha_k$ tels que $\varphi'(\beta_k) = 0$.

2. (2 points) On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme P_n possède exactement $n-1$ racines réelles distinctes.

Initialisation. Comme $P_1 = 1$ alors P_1 ne possède aucune racine.

Comme $P_2 = -2X$ alors P_2 possède exactement une racine, le réel 0.

Hérédité. Supposons que pour un entier $n \geq 2$ le polynôme P_n possède exactement $n-1$ racines réelles distinctes. On ordonne celles-ci et on les note $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1}$.

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^n}$

La fonction $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

La fonction $f^{(n)}$ s'annule en $\alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1}$ car les α_i sont racines de P_n .

Comme P_n est de degré $n-1$ et de coefficient dominant a_n alors :

$$f^{(n)}(x) \underset{(\pm\infty)}{\sim} \frac{a_n x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{a_n}{x^{n+1}}$$

Ceci montre que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^{(n)}(x) = 0$.

On peut donc appliquer les résultats de la question précédente à la fonction $\varphi = f^{(n)}$, avec $k = n-1$, elle vérifie bien les hypothèses.

D'après la question précédente il existe des réels $\beta_0 < \dots < \beta_{n-1}$ en lesquels φ' s'annule, i.e., $f^{(n+1)}$ s'annule.

Comme $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$ alors les réels $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ sont racines de P_{n+1} .

Le polynôme P_{n+1} possède donc n racines réelles distinctes.

Comme P_{n+1} est de degré n alors il ne possède pas d'autres racines.

L'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n possède exactement $n - 1$ racines réelles distinctes.

3. (a) (2 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. Pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ = \cos(f(x)) \sin\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2(f(x)) = \frac{1}{1 + \tan^2(f(x))} \end{aligned}$$

Comme $f(x) = \arctan x$ alors $\tan(f(x)) = x$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{1+x^2} = f'(x)$$

Le propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Par dérivation, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (n-1)! n f'(x) \left[-\sin(f(x)) \cos^{n-1}(f(x)) \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos^n(f(x)) \cos\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \right] \\ &= n! f'(x) \cos^{n-1}(f(x)) \left[\cos(f(x)) \cos\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \sin(f(x)) \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \right] \\ &= n! f'(x) \cos^{n-1}(f(x)) \cos\left((n+1)f(x) + n\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

On sait que $f'(x) = \cos^2(f(x))$, et la formule $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ donne alors :

$$f^{(n+1)}(x) = n! \cos^{n+1}(f(x)) \sin\left((n+1)\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$, et ceci prouve l'hérédité.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) (1 point) Comme $f(x) = \arctan x$ alors $f(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et donc $\cos(f(x)) > 0$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = 0 &\iff \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 \\ &\iff n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right) = k\pi && k \in \mathbb{Z} \\ &\iff f(x) = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On sait que $f(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Or pour tout entier k :

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \iff 0 < k < n$$

Ainsi :

$$f^{(n)}(x) = 0 \iff x = \tan\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right) \text{ avec } k = 1, \dots, n-1$$

Ces racines sont distinctes car la fonction tangente est bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

De plus on vérifie que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$, donc :

$$f^{(n)}(x) = 0 \iff x = -\cot \frac{k\pi}{n} \text{ avec } k = 1, \dots, n-1$$

Comme $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ alors ces racines sont également les racines du polynôme P_n . Elles sont bien au nombre de $n-1$, le degré de P_n .

On peut ajouter que ces racines s'expriment $x = \cot \frac{k\pi}{n}$ pour $k = 1, \dots, n-1$, car la fonction $k \mapsto n-k$ est une bijection de l'ensemble $\{1, \dots, n-1\}$ et pour tout $x \in]0, \pi[$: $\cot(\pi-x) = -\cot x$.

4. (1 point) D'après ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n = (-1)^{n-1} n! \prod_{k=1}^{n-1} \left(X + \cot \frac{k\pi}{n}\right)$$

5. (1 point) Soit m et n deux entiers. Si m divise n alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = mq$.

Les racines de P_m sont les $\cot \frac{k\pi}{m}$ pour $k = 1, \dots, m-1$.

Or $\cot \frac{k\pi}{m} = \cot \frac{kq\pi}{n}$, comme $0 < k < m$ alors $0 < kq < n$, donc $\cot \frac{kq\pi}{n}$ est racine de P_n .

Les racines de P_m sont simples et elles sont toutes racines de P_n , donc P_m divise P_n .

Partie C. Forme développée de P_n

(4 points)

1. (1 point) On sait que $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$. On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right)$$

2. (1 point) Pour tout complexe a , si $\varphi(x) = \frac{1}{x+a}$ alors on démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{i}{2} \left(\frac{1}{(x+i)^n} - \frac{1}{(x-i)^n} \right)$$

3. (1 point) D'après l'expression ci-dessus :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = 0 \iff (x-i)^n = (x+i)^n \iff \frac{x-i}{x+i} \in \mathbb{U}_n$$

Cette équivalence est valable car x est réel donc $x+i$ n'est pas nul.

On remarque aussi que $\frac{x-i}{x+i}$ ne peut être égal à 1.

Soit ζ une racine n -ème de l'unité différente de 1. Alors :

$$\frac{x-i}{x+i} = \zeta \iff x = i \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

Comme ζ est une racine n -ème de l'unité différente de 1 alors $\zeta = e^{i \frac{k2\pi}{n}}$ pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$. On en déduit :

$$x = i \frac{1 + e^{i \frac{k2\pi}{n}}}{1 - e^{i \frac{k2\pi}{n}}} = i \frac{e^{-i \frac{k\pi}{n}} + e^{i \frac{k\pi}{n}}}{e^{-i \frac{k\pi}{n}} - e^{i \frac{k\pi}{n}}} = i \frac{2 \cos \frac{k\pi}{n}}{-2i \sin \frac{k\pi}{n}} = -\cot \frac{k\pi}{n}$$

Les racines de P_n sont celles de $f^{(n)}$ donc on a bien retrouvé les racines de P_n .

4. (1 point) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel. Comme $(x^2 + 1) = (x-i)(x+i)$ alors :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{i}{2} \left(\frac{1}{(x+i)^n} - \frac{1}{(x-i)^n} \right) \\ &= (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{i}{2} \left(\frac{(x-i)^n - (x+i)^n}{(x^2+1)^n} \right) \end{aligned}$$

Par définition $P_n(x) = (x^2 + 1)^n f^{(n)}(x)$ donc :

$$P_n = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{i}{2} [(X-i)^n - (X+i)^n]$$

La formule du binôme donne :

$$P_n = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{i}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^{n-k} ((-i)^k - i^k)$$

Si k est pair alors il existe un entier p tel que $k = 2p$, puis $(-i)^k - i^k = (-1)^p - (-1)^p = 0$.

Si k est impair alors il existe un entier p tel que $k = 2p + 1$. Comme $0 \leq k \leq n$ alors $1 \leq 2p + 1 \leq n$ donc $0 \leq p \leq \frac{n-1}{2}$ puis $0 \leq p \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. De plus $(-i)^k - i^k = (-1)^p(-i) - (-1)^p i = -2i(-1)^p$. On en déduit :

$$P_n = (-1)^{n-1} (n-1)! \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p X^{n-2p-1}$$

Il s'agit bien de la formule à démontrer.