Lycée Bellevue – Toulouse **24 mars 2023**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°7

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Le barème et indicatif.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Exercice 1. *(9 points)*

On note $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. On souhaite déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que P' divise P.
   Soit P un tel polynôme non-nul.
   (a) Démontrer qu'il existe deux scalaires λ et α tels que $P = \lambda(X - \alpha)P'$.
   (b) Justifier qu'il existe un entier strictement positif m et un polynôme Q tels que $P = (X - \alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
   (c) En déduire la valeur de λ en fonction de m, puis déterminer Q'.
   (d) Conclure, sans oublier la synthèse.
2. Soit P un polynôme non-nul possédant au moins deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$.
   On souhaite démontrer que P' possède une racine différente de celles de P.
   On note $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines complexes de P et $m_1, \dots, m_r$ leurs ordres de multiplicité.
   (a) Démontrer qu'il existe un polynôme R tels que $P' = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)^{m_i - 1}R$.
   (b) Conclure en raisonnant sur le degré de P.
   (c) À l'aide de ce résultat retrouver l'ensemble des polynômes P tels que P' divise P.

Exercice 2. *(12 points)*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $\quad u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1. Justifier qu'il existe un majorant M de $|f''|$ sur $[0,1]$.

2. Soit $x \in]0,1]$ fixé, A un réel, et g_x la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$g_x(t) = f(t) - tf'(0) - t^2 A.$$

   (a) Justifier que l'on peut choisir A, dépendant de x, de façon à avoir $g_x(x) = 0$.
   On garde cette valeur de A dans la suite.

   (b) Justifier que la fonction g_x est de classe $\mathcal{C}^2$, puis démontrer qu'il existe $c_x \in]0,x[$ tel que $g_x''(c_x) = 0$.

   (c) Démontrer que :

$$\forall x \in [0,1] \qquad |f(x) - xf'(0)| \leqslant M\frac{x^2}{2} \tag{1}$$

3. Dans cette question on démontre différemment ce dernier résultat.
   On pose, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\varphi(x) = f(x) - M\frac{x^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = f(x) + M\frac{x^2}{2}$$

   (a) Démontrer que φ et ψ sont l'une concave et l'autre convexe.

   (b) Donner une équation des tangentes à leurs courbes en 0 et retrouver la formule (1).

4. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| u_n - f'(0)\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \right| \leqslant \frac{M}{2n}$$

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

5. Application : calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Problème : Dérivées successives de l'arc-tangente *(23 points)*

Dans tout ce problème f désigne la fonction arc-tangente : $f = \arctan$.

Partie A. Définitions et premières propriétés des P_n *(9 points)*

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

   Justifier que $P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - 2nXP_n$.

2. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un entier a_n non-nul et un polynôme Q_n de degré inférieur ou égal à $n-2$ tels que $P_n = a_n X^{n-1} + Q_n$.
   (b) En déduire le degré et le coefficient dominant de P_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On pose $g(x) = (1+x^2)f'(x)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $g^{(n)}(x)$ de deux façons différentes et en déduire :
$$\forall n \geqslant 2 \qquad P_{n+1} + 2nXP_n + n(n-1)(1+X^2)P_{n-1} = 0$$
4. En utilisant les questions 1 et 3 démontrer que :
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad & P'_{n+1} = -n(n+1)P_n \\ \text{puis} \qquad & (1+X^2)P''_n - 2(n-1)XP'_n + n(n-1)P_n = 0 \end{aligned}$$

Partie B. Racines de P_n *(10 points)*

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que :
   - Il existe des réels $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$ tels que : $\forall i = 1, \ldots, k \quad \varphi(\alpha_i) = 0$,
   - φ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

   (a) Démontrer qu'il existe des réels $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ tels que $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \beta_{k-1} < \alpha_k$ et $\varphi'(\beta_1) = \cdots = \varphi'(\beta_{k-1}) = 0$.
   (b) Démontrer par l'absurde qu'il existe $\beta_0 < \alpha_1$ tel que $\varphi'(\beta_0) = 0$, puis qu'il existe $\beta_k > \alpha_k$ tel que $\varphi'(\beta_k) = 0$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n possède exactement $n-1$ racines réelles distinctes.
3. (a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:
$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
   (b) Déterminer les racines de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   On pourra utiliser la fonction cotangente : $\cot = \frac{\cos}{\sin}$.
4. Donner la factorisation de P_n.
5. Soit m et n deux entiers strictement positifs. Démontrer que si m divise n alors P_m divise P_n.

Partie C. Forme développée de P_n *(4 points)*

1. Décomposer $f'(x)$ en éléments simples dans l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. En déduire une expression explicite sous forme complexe de $f^{(n)}$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. Retrouver grâce à cette expression les racines de P_n, pour tout $n \geqslant 1$.
4. Déduire de la question 2 une expression réelle de $f^{(n)}$. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad P_n = (-1)^{n-1}(n-1)! \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p X^{n-1-2p}$$