

Devoir à la Maison n°12

Le but de ce devoir est de résoudre les équations différentielles de la forme

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (\star)$$

où n est un entier naturel, $a_0, \dots, a_n$ sont des complexes, et l'inconnue est une fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable n fois.

Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients complexes.

On note $\mathcal{E}_P$ l'équation différentielle $(\star)$ ci-dessus, et E_P l'ensemble de ses solutions.

1. Soit P un polynôme de degré n , c'est-à-dire $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ avec $a_n \neq 0$, et y une solution de l'équation $\mathcal{E}_P$, c'est-à-dire une fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable n fois vérifiant l'équation $\mathcal{E}_P$.

Démontrer que y est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On note dorénavant $\mathcal{C}^\infty$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Pour tout polynôme $P = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ on définit l'application :

$$\begin{aligned} \Phi_P : \mathcal{C}^\infty &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty \\ y &\longmapsto \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}. \end{aligned}$$

2. Démontrer que l'application Φ_P est bien définie et que c'est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty$.

Quel est son noyau ?

3. Démontrer que l'application $\Phi : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty)$ est linéaire.

$$P \longmapsto \Phi_P$$

4. Démontrer que pour tous polynômes $P = \sum_{i=0}^m a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^n b_j X^j$: $\Phi_{PQ} = \Phi_P \circ \Phi_Q$.

5. Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux.

On souhaite démontrer que $E_{PQ} = E_P \oplus E_Q$.

On note $R = PQ$.

(a) Justifier que E_P et E_Q sont des sous-espaces vectoriels de E_R .

(b) Justifier qu'il existe deux polynômes U et V tels que :

$$\forall y \in \mathcal{C}^\infty \quad y = \Phi_P \circ \Phi_U(y) + \Phi_Q \circ \Phi_V(y).$$

(c) En déduire que $E_R = E_P + E_Q$.

(d) Démontrer de même que E_P et E_Q sont en somme directe, et conclure.

6. Soit α un complexe, n un entier naturel non-nul et $P = (X - \alpha)^n$.

(a) Soit $y \in \mathcal{C}^\infty$ et $z : t \mapsto e^{-\alpha t} y(t)$. Démontrer que : $y \in E_P \iff z^{(n)} = 0$

(b) En déduire que $E_P = \{t \mapsto A(t)e^{\alpha t} \mid A \in \mathbb{C}_{n-1}[X]\}$.

(c) Donner la dimension de E_P .

7. Démontrer par récurrence forte sur le degré de P :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\} \quad \dim E_P = \deg P.$$

On peut maintenant démontrer (mais ce n'est pas demandé) le théorème suivant :

Théorème. Soit $a_0, \dots, a_n$ des complexes non tous nuls et $\mathcal{E}$ l'équation différentielle :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Soit $P = a_n X^n + \dots + a_0$, soit $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ses racines complexes, $m_1, \dots, m_r$ leurs ordres de multiplicité respectifs, si bien que :

$$P = a_n \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

Alors les solutions de l'équation différentielle $\mathcal{E}$ sont les fonctions y définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \sum_{k=1}^r A_k(t) e^{\alpha_k t} \quad \text{avec} \quad \forall k = 1, \dots, r \quad A_k \in \mathbb{C}_{m_k-1}[X].$$

De plus, l'ensemble de toutes ces solutions est un espace vectoriel de dimension $\deg P$.

8. Résoudre dans $\mathcal{C}^\infty$ l'équation différentielle :

$$y^{(4)} - 11y^{(2)} + 18y^{(1)} - 8y = 0.$$

Indications.

4. Écrire $PQ = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_i b_j X^{i+j}$.
6. Utiliser la formule du binôme et la formule de Leibniz.
7. Justifier que si P est un polynôme de degré $n \geq 1$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}^*$, et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P = (X - \alpha)^m Q$ avec $(X - \alpha)^m$ et Q premiers entre eux.