Corrigé du Devoir à la Maison n°11

19

a. La fonction tan est définie sur $\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} I_m$, donc *a fortiori* sur I_m.

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on pose $f_m : \begin{array}{rcl} I_m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x - x. \end{array}$

Cette fonction est continue.

Elle est dérivable de dérivée $x \mapsto \tan^2 x$. Comme cette dérivée est strictement positive sauf en $m\pi$ où elle s'annule alors f_m est strictement croissante.

Ses limites sont :

$$\lim_{\substack{x \to m\pi - \frac{\pi}{2} \\ >}} f_m(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to m\pi + \frac{\pi}{2} \\ <}} f_m(x) = +\infty.$$

Par théorème la fonction f_m réalise une bijection de I_m dans $\mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il admet un et un seul antécédent dans I_m par f_m.

On note α_m cet antécédent. Ainsi $\alpha_m \in I_m$ et $\tan(\alpha_m) = \alpha_m$.

b. Comme $0 \in I_0$ et $\tan 0 = 0$ alors $\alpha_0 = 0$.

Soit $m \in \mathbb{Z}$. Comme $\alpha_m \in I_m$ alors $m\pi - \frac{\pi}{2} < \alpha_m < m\pi + \frac{\pi}{2}$, ce qui donne :

$$-m\pi - \frac{\pi}{2} < -\alpha_m < -m\pi + \frac{\pi}{2} \qquad \text{donc} \qquad -\alpha_m \in I_{-m}$$

De plus $\tan \alpha_m = \alpha_m$, donc par parité de la fonction tangente : $\tan(-\alpha_m) = -\alpha_m$.

Ceci montre que $\alpha_{-m} = -\alpha_m$, car il existe un unique réel $x \in I_{-m}$ tel que $\tan x = x$, et $-\alpha_m$ vérifie cette égalité.

c. La fonction arc-tangente est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad m\pi - \frac{\pi}{2} < m\pi + \arctan x < m\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Ceci montre que pour tout $x \in I_m$: $h_m(x) \in I_m$.

Ainsi l'intervalle I_m est stable par h_m.

Par équivalence, pour tout $x \in I_m$:

$$h_m(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad m\pi + \arctan x = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \arctan x = x - m\pi.$$

Comme $x \in I_m$ alors $x - m\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et comme la fonction $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est la réciproque de la fonction $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ alors :

$$\arctan x = x - m\pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \tan(x - m\pi).$$

La fonction tangente est π-périodique donc $\tan(x - m\pi) = \tan x$.

On en déduit donc :

$$\forall x \in I_m \qquad h_m(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \tan(x).$$

Comme α_m est l'unique point fixe de la fonction tangente sur l'intervalle I_m alors :

$$\forall x \in I_m \qquad h_m(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \alpha_m.$$

Ainsi α_m est l'unique point fixe de la fonction h_m sur I_m.

d. La fonction h_m est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h'_m(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Soit $x \in I_m$. Comme $m \geqslant 1$ alors $x > \frac{\pi}{2}$. Ceci donne :

$$\forall x \in I_m \qquad |h'_m(x)| < \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{4}{4+\pi^2}.$$

Notons $k = \frac{4}{4+\pi^2}$. Alors $k < 1$.

La fonction h_m est dérivable sur l'intervalle I_m et $|h'_m|$ est majorée par k, donc d'après l'inégalité des accroissements finis la fonction h_m est k-lipschitzienne.

e. On a posé $u_0 = m\pi$, donc $u_0 \in I_m$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a posé $u_{n+1} = h_m(u_n)$.

Comme l'intervalle I_m est stable par la fonction h_m alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et incluse cet intervalle I_m.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction h_m est k-lipschitzienne sur I_m, les réels u_n et α_m appartiennent à I_m, donc :

$$|h_m(u_n) - h_m(\alpha_m)| \leqslant k|u_n - \alpha_m|.$$

Comme α_m est point fixe de h_m alors :

$$|u_{n+1} - \alpha_m| \leqslant k|u_n - \alpha_m|.$$

Par récurrence rapide :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n - \alpha_m| \leqslant k^n|u_0 - \alpha_m|$$

Comme $|k| < 1$ alors $k^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et donc par théorème d'encadrement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α_m.

31

a. Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors sa dérivée seconde f'' est continue.

Par théorème, une fonction continue sur un segment est bornée, donc la fonction f'' est bornée sur le segment $[a, b]$, et ainsi la fonction $|f''|$ admet une borne supérieure sur ce segment.

b. Posons $g(x) = \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$.

Cette fonction est deux fois dérivable, de dérivée seconde $g''(x) = -M$.

Les fonctions $h = f - g$ et $k = f + g$ sont deux fois dérivables, de dérivées secondes $h''(x) = f''(x) + M$ et $k''(x) = f''(x) - M$.

Par définition de M : $\forall x \in [a, b] \quad -M \leqslant f''(x) \leqslant M$.

Donc $h''(x) \geqslant 0$ et $k''(x) \leqslant 0$.

La fonction h est donc convexe alors que la fonction k est concave.

Or $h(a) = h(b) = k(a) = k(b) = 0$, donc la corde reliant les points d'abscisses a et b est l'axe des abscisses. Comme h est convexe alors la corde est au-dessus de sa courbe, comme k est concave alors la corde est en-dessous de sa courbe.

On en déduit :

$$\forall x \in [a, b] \qquad h(x) \leqslant 0 \leqslant k(x)$$

Puis :

$$\forall x \in [a, b] \qquad -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

Enfin :

$$\forall x \in [a, b] \qquad |f(x)| \leqslant g(x).$$

Ceci est le résultat demandé.

35

a. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[a, x]$ si $a \leqslant x$ ou $[x, a]$ si $x < a$.

On suppose dans la suite que $a < x$, les résultats sont semblables si $x < a$.

Comme x et a appartiennent à I et comme celui-ci est un intervalle alors il contient l'intervalle $[a, x]$.

La fonction f est dérivable sur I donc :

- f est continue sur $[a, x]$,
- f est dérivable sur $]a, x[$.

D'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]a, x[$ tel que $f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, ce qui donne comme demandé :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(c).$$

b. On souhaite justifier qu'il existe un réel A tel que :

$$f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) = \frac{(x-a)^2}{2}A.$$

Si $x = a$ alors cette équation donne $0 = 0$, elle est valable pour tout réel A.

Sinon il suffit de poser :

$$A = \frac{2}{(x-a)^2}(f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)).$$

c. Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors la fonction f' est dérivable, et donc par combinaison linéaire la fonction φ_x est dérivable sur I.

On remarque que $\varphi_x(x) = 0$, et $\varphi_x(a) = 0$ par définition de A. Ainsi :

- La fonction φ_x est continue sur $[a, x]$
- La fonction φ_x est dérivable sur $]a, x[$
- $\varphi_x(a) = \varphi_x(x)$

D'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, x[$ tel que $\varphi_x'(c) = 0$.

On calcule :

$$\forall t \in I \qquad \varphi_x'(t) = -f'(t) + f'(t) - (x-t)f''(t) + (x-t)A = (x-t)(A - f''(t))$$

Comme c est différent de x alors l'égalité $\varphi_x'(c) = 0$ donne $f''(c) = A$.

Nous avons donc démontré qu'il existe c entre a et x (*i.e.*, dans $]a, x[$ ou $]x, a[$) tel que :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(c).$$

38

Par hypothèse il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments distincts de $[a, b]$ tels que $f(u_n) = 0$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est incluse dans le segment $[a, b]$, donc bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une suite extraite de (u_n) convergente.

On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette nouvelle suite, et c sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a \leqslant v_n \leqslant b$. Par théorème de comparaison $a \leqslant c \leqslant b$, donc $c \in [a, b]$, et $f(c)$ est défini.

De plus comme f est continue alors la suite $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(c)$.

Or $f(v_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, et ainsi $f(c) = 0$.

On applique le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[v_n, v_{n+1}]$, ou $[v_{n+1}, v_n]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme

- la fonction f est continue sur $[v_n, v_{n+1}]$ ou $[v_{n+1}, v_n]$,
- la fonction f est dérivable sur $[v_n, v_{n+1}]$ ou $[v_{n+1}, v_n]$,
- $f(v_n) = f(v_{n+1})$,

alors il existe w_n entre v_n et v_{n+1} tel que $f'(w_n) = 0$.

Par théorème d'encadrement, comme les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers c alors la suite (w_n) converge vers c.

Comme f' est continue alors la suite $(f'(w_n))$ converge vers $f'(c)$. Comme $f'(w_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors la suite $(f'(w_n))$ converge vers 0 et donc $f'(c) = 0$.

Il existe bien $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = f'(c) = 0$.