Corrigé du Devoir Surveillé n°6

Problème 1. Théorème de Cesaro monotone et applications *(21 points)*

Ernesto Cesaro, 1859 – 1906 mathématicien italien.

Le théorème figure déjà dans le cours d'analyse de Cauchy en 1821.

Partie A. Démonstration du cas monotone *(8 points)*

1. *(1 point)* La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc elle admet une limite.
   Si elle n'était pas majorée cette limite serait $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. Or la suite (x_n) est convergente, donc elle est majorée.
   Par théorème la suite (u_n) est croissante majorée donc par théorème de la limite monotone elle converge vers sa borne supérieure.
   Ainsi la borne supérieure de la suite (x_n) est sa limite ℓ.

2. (a) *(1 point)* Soit n un entier strictement positif. Comme la suite (x_n) est croissante alors :
   $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad k < n \quad \Longrightarrow \quad x_k \leqslant x_n$$
   Ceci donne :
   $$\forall k = 0, \dots, n-1 \qquad x_k \leqslant x_n$$
   Par somme :
   $$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} x_n = n x_n$$
   En divisant par n, qui est strictement positif, on obtient :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad y_n \leqslant x_n$$
   Ceci est le résultat attendu.

   (b) *(1 point)* On calcule, pour un $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\Big)x_k + \frac{1}{n+1}x_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}x_k + \frac{1}{n+1}x_n \\ &= \frac{1}{n+1}\left(x_n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right) = \frac{x_n - y_n}{n+1} \end{aligned}$$
   D'après la question précédente $y_n \leqslant x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad y_{n+1} - y_n \geqslant 0$$
   Ainsi la suite (y_n) est croissante.

(c) *(1 point)* Par transitivité, comme $y_n \leqslant x_n$ et (x_n) est majorée par ℓ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad y_n \leqslant x_n \leqslant \ell$$

Ainsi la suite (y_n) est majorée par ℓ.

La suite (y_n) est croissante majorée, donc par théorème elle converge.

3. (a) *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit :

$$2y_{2n} - y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} x_k$$

Comme la suite x_k est croissante alors :

$$\forall k \in \{n, \dots, 2n-1\} \qquad x_k \geqslant x_n$$

Par somme :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} x_k \geqslant \sum_{k=n}^{2n-1} x_n = nx_n$$

Ceci donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 2y_{2n} - y_n \geqslant x_n$$

(b) *(2 points)* Soit ℓ' la limite de la suite (y_n).

La suite (y_{2n}) est extraite de la suite (y_n) qui converge vers ℓ', donc par théorème elle converge vers ℓ'.

On a démontré dans la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 2y_{2n} - y_n \geqslant x_n$$

Par théorème de comparaison :

$$2\ell' - \ell' \geqslant \ell$$

Ceci donne $\ell' \geqslant \ell$. De plus, comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad y_n \leqslant x_n$$

alors par théorème de comparaison :

$$\ell' \leqslant \ell$$

Finalement $\ell = \ell'$, la suite (y_n) converge vers la même limite que la suite (x_n).

Ceci démontre le théorème de Cesaro dans le cas où la suite (x_n) est croissante.

4. *(1 point)* Supposons que la suite (x_n) est décroissante. Alors la suite $(-x_n)$ est croissante, et elle converge vers $-\ell$. On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad z_n = \frac{-x_0 - x_1 - \cdots - x_{n-1}}{n}$$

D'après ce qui précède, comme la suite $(-x_n)$ est croissante et converge vers $-\ell$ alors la suite (z_n) converge vers $-\ell$.

En conséquence la suite $(y_n) = (-z_n)$ converge vers ℓ, ce qui démontre le théorème dans le cas où la suite (x_n) est décroissante.

Partie B. *(9 points)*

1. *(1 point)* Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.
   Si $x > 0$ alors $h(x)$ est défini, c'est un réel positif.
   Ainsi l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ est stable par la fonction h.
   Or $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la suite (a_n) est définie par la relation de récurrence $a_{n+1} = h(a_n)$.
   Par propriété la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et incluse dans l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc strictement positive.
2. *(2 points)* Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{1+a_n}} \leqslant 1$$
   Ceci montre que la suite (a_n) est décroissante.
   Or elle est minorée par 0, donc par théorème elle converge.
   Soit ℓ sa limite. On sait que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} = h(a_n)$
   La suite (a_{n+1}) converge vers ℓ car elle est extraite de la suite (a_n), la suite $(h(a_n))$ converge vers $h(\ell)$ car la fonction h est continue. Par unicité de la limite $\ell = h(\ell)$.
   Ceci donne :
$$\ell\Big(\sqrt{1+\ell} - 1\Big) = 0$$
   Ainsi $\ell = 0$ ou $\sqrt{1+\ell} = 1$, ce qui donne dans les deux cas $\ell = 0$.
   Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. (a) *(1 point)* La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $1+x$ est strictement positif sur cet intervalle. Par composition, somme et quotient la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée est :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = \frac{-2 - x + 2\sqrt{1+x}}{2x^2\sqrt{1+x}}$$
   Par équivalences :
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) \leqslant 0 \quad &\iff \quad 2\sqrt{1+x} \leqslant 2 + x \\ &\iff \quad 4 + 4x \leqslant 4 + 4x + x^2 \quad \iff \quad 0 \leqslant x^2 \end{aligned}$$
   Cette dernière égalité étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ et f est décroissante sur cet intervalle.
   (b) *(2 points)* La relation de récurrence pour a_n donne :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n = \frac{\sqrt{1+a_n}}{a_n} - \frac{1}{a_n} = f(a_n)$$
   La limite de f en 0 est calculée de la façon suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = \frac{(1+x)-1}{x\Big(\sqrt{1+x}+1\Big)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \quad \xrightarrow[x\to 0]{} \quad \frac{1}{2}$$
   On sait que $b_n = f(a_n)$ et que (a_n) converge vers 0, donc par composition de limites :
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}.$$

(c) *(1 point)* La suite (a_n) est décroissante, la fonction f est décroissante, donc la suite (b_n) est croissante. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \geqslant a_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad f(a_n) \leqslant f(a_{n+1}) \quad \Longrightarrow \quad b_n \leqslant b_{n+1}$$

4. *(2 points)* La suite (b_n) est croissante et converge vers $\frac{1}{2}$. D'après le théorème de Cesaro monotone la suite (c_n) converge aussi vers $\frac{1}{2}$.
Or par télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} b_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0}\right)$$

Comme $\left(\frac{1}{na_0}\right)$ converge vers 0 et (c_n) converge vers $\frac{1}{2}$ alors $\left(\frac{1}{na_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{2}$.
On en déduit que $\left(\frac{na_n}{2}\right)$ converge vers 1 et enfin $a_n \sim \frac{2}{n}$.

Partie C. *(4 points)*

La fonction $g : x \mapsto x + \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.
Si x est un réel strictement positif alors $g(x)$ est défini et strictement positif, donc l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est stable par g.
Or $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la suite (u_n) satisfait la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$, donc par propriété elle est bien définie et strictement positive.

1. *(2 points)* La suite (u_n) est croissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} \geqslant 0$$

Supposons qu'elle est majorée. Alors par théorème elle est convergente.
Soit ℓ sa limite. Comme précédemment, la relation $u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$ et la continuité de la fonction $x \mapsto x + \sqrt{x}$ montre que $\ell = \ell + \sqrt{\ell}$, donc $\ell = 0$.
Comme la suite (u_n) est strictement croissante alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_0 \leqslant u_n$$

Par théorème de comparaison ceci donne $u_0 \leqslant \ell$, ce qui est absurde car $u_0 > 0$.
Cette contradiction montre que la suite (u_n) n'est pas majorée.
Elle est croissante non majorée donc par théorème elle tend vers $+\infty$.

2. *(2 points)* La relation de récurrence pour (u_n) donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{u_n + \sqrt{u_n}}}$$

Comme $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$ alors v_n est positif et $u_n = \frac{1}{v_n^2}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v_n^2} + \frac{1}{v_n}}} = \frac{v_n}{\sqrt{1 + v_n}}$$

Ainsi la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence de la suite (a_n) de la partie précédente, et on a bien $v_0 > 0$.
Le résultat de la partie précédente montre que $v_n \sim \frac{2}{n}$.
Comme $u_n = \frac{1}{v_n^2}$ alors $u_n \sim \frac{n^2}{4}$.

Problème 2. *(19 points)*

Partie A. *(4 points)*

1. *(1 point)* Tout d'abord $g(0) = f(0) - f(0) = 0$.
   Ensuite $g(x) = f(x) + f(0)$ donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
   $$g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + f(0) = \frac{f(x)+f(y)}{2} + f(0)$$
   $$= \frac{g(x) - f(0) + g(y) - f(0)}{2} + f(0) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$$
   Ceci montre que g vérifie la même équation fonctionnelle que f.
2. *(2 points)* La relation $(\star)$ montre que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g\Big(\frac{2x+0}{2}\Big) = \frac{g(2x)+g(0)}{2}$$
   Comme $g(0) = 0$ alors $2g(x) = g(2x)$.
   La relation $(\star)$ donne ensuite :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad g\Big(\frac{2x+2y}{2}\Big) = \frac{g(2x)+g(2y)}{2}$$
   Comme $g(2x) = 2g(x)$ et $g(2y) = 2g(y)$ alors :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad g(x+y) = g(x) + g(y)$$
   Ceci est le résultat attendu.
3. *(1 point)* La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0, et d'après la relation juste démontrée :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x-x) = g(x) + g(-x)$$
   Comme $g(0) = 0$ alors :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(-x) = -g(x)$$
   Ceci montre que la fonction g est impaire.

Partie B. *(10 points)*

1. (a) *(0,5 point)* La relation de la question A2 donne :
   $$\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^2 \qquad g((x - x_0) + x_0) = g(x - x_0) + g(x_0)$$
   On en déduit effectivement $g(x - x_0) = g(x) - g(x_0)$.
   (b) *(2 points)* La fonction f est continue en 0 et $g(x) = f(x) - f(0)$ donc la fonction g est également continue en 0.
   Comme $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$ et g est continue en 0 alors par composition de limites :
   $$\lim_{x \to x_0} g(x - x_0) = g(0) = 0$$
   On en déduit :
   $$\lim_{x \to x_0} (g(x) - g(x_0)) = 0$$
   Ceci donne :
   $$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$
   Ainsi g est continue en x_0.

2. (a) *(1 point)* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme $g(x+1) = g(x) + g(1)$ et $g(1) = a$ alors :
$$h(x+1) = g(x+1) - a(x+1) = g(x) + g(1) - ax - a = g(x) - ax = h(x)$$
Ceci montre que h est périodique de période 1.

   (b) *(2 points)* La fonction g est continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ d'après la question B1. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto ax$ est aussi continue donc par somme h est continue.
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes, donc h est bornée sur le segment $[0,1]$ et atteint ses bornes. Elle admet donc un maximum M et un minimum m sur le segment $[0,1]$, ce qui implique :
$$\forall x \in [0,1] \qquad m \leqslant h(x) \leqslant M$$
Soit n un entier. Comme h est 1-périodique alors ses valeurs sur l'intervalle $[n, n+1]$ sont ses valeurs sur le segment $[0,1]$, et donc :
$$\forall x \in [n, n+1] \qquad m \leqslant h(x) \leqslant M$$
Ceci montre que h est bornée sur $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1] = \mathbb{R}$, et que m et M sont les extrema de h sur $\mathbb{R}$.

   (c) *(1,5 points)* Comme M est le maximum de h sur $\mathbb{R}$ alors il existe un réel x_1 tel que $h(x_1) = M$.
D'après la relation de la question A2 :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x+x_1) = g(x+x_1) - a(x+x_1) = g(x) + g(x_1) - ax - ax_1 = h(x) + h(x_1)$$
Ainsi $h(x + x_1) = h(x) + M$ et comme M est le maximum de h sur $\mathbb{R}$ alors :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x + x_1) \leqslant M$$
Ceci donne $h(x) + M \leqslant M$ et donc :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) \leqslant 0$$

   (d) *(1 point)* Comme m est le maximum de h sur $\mathbb{R}$ alors il existe un réel x_2 tel que $h(x_2) = m$. Ainsi on a $h(x + x_2) \geqslant m$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on obtient comme ci-dessus $h(x + x_2) = h(x) + h(x_2) = h(x) + m$, ce qui montre que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) \geqslant 0$$

3. *(1 point)* D'après les deux questions précédentes : $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = 0$.
Comme $h(x) = g(x) - ax$ alors : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = ax$.
Comme $g(x) = f(x) - f(0)$ alors : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + f(0)$.

4. *(1 point)* D'après les questions précédentes, si f est solution de problème continue en 0 alors il existe deux réels a et b tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = ax + b$$
Réciproquement, les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ sont bien continues en 0 et vérifient la relation $(\star)$ car :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = a\frac{x+y}{2} + b = \frac{ax + b + ay + b}{2} = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$
Ainsi les solutions du problème continues en 0 sont les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Partie C. *(5 points)*

1. *(0,5 point)* Comme f est croissante alors $f(0) \leqslant f(1)$, ce qui donne $0 \leqslant f(1) - f(0)$ puis $0 \leqslant g(1)$. Or $a = g(1)$, donc $a \geqslant 0$.
2. *(1 point)* D'après la question A2 : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(2x) = 2g(x)$.
   On démontre alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad g\Big(\frac{1}{2^n}\Big) = \frac{a}{2^n}$
   Initialisation. Cette propriété est vraie pour $n = 0$ car elle s'écrit alors : $g(1) = a$.
   Hérédité. Si elle est vraie pour un certain rang n alors $g\Big(\frac{1}{2^n}\Big) = \frac{a}{2^n}$.
   La relation de la question A2 pour $x = \frac{1}{2^{n+1}}$ donne :
   $$g\Big(\frac{1}{2^n}\Big) = 2g\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big)$$
   On en déduit $g\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) = \frac{1}{2}g\Big(\frac{1}{2^n}\Big) = \frac{a}{2^{n+1}}$, ce qui démontre l'hérédité.
   Conclusion. Ainsi par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad g\Big(\frac{1}{2^n}\Big) = \frac{a}{2^n}$.
3. (a) *(1 point)* Soit $\varepsilon > 0$. Comme $a \geqslant 0$ alors $\frac{a}{\varepsilon} \geqslant 0$.
   Supposons que $a > 0$. Alors $\frac{a}{\varepsilon} > 0$ donc $\log_2 \frac{a}{\varepsilon} = \frac{\ln \frac{a}{\varepsilon}}{\ln 2}$ est défini, et il existe un entier N supérieur à ce réel.
   Pour un tel entier $N \geqslant \log_2 \frac{a}{\varepsilon}$, la croissance de la fonction $x \mapsto 2^x$ montre que $2^N \geqslant \frac{a}{\varepsilon}$, et donc $\varepsilon \geqslant \frac{a}{2^N}$.
   La fonction g est croissante car f est croissante et $g(x) = f(x) - f(0)$. Cette croissance montre que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -\frac{1}{2^N} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^N} \quad \Longrightarrow \quad g\Big(-\frac{1}{2^N}\Big) \leqslant g(x) \leqslant g\Big(-\frac{1}{2^N}\Big)$$
   D'après la question précédente $g\Big(\frac{1}{2^N}\Big) = \frac{a}{2^N}$ et comme g est impaire alors $g\Big(-\frac{1}{2^N}\Big) = -\frac{a}{2^N}$. De plus $\frac{a}{2^N} \leqslant \varepsilon$ donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -\frac{1}{2^N} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^N} \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon \leqslant -\frac{a}{2^N} \leqslant g(x) \leqslant \frac{a}{2^N} \leqslant \varepsilon$$
   On a montré qu'il existe bien un entier N tel que l'implication ci-dessus soit satisfaite.
   Si $a = 0$ alors $g\Big(\frac{1}{2^N}\Big) = 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ donc l'implication est évidente pour tout entier N, par exemple $N = 0$.
   (b) *(2 points)* Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente il existe un entier N tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -\frac{1}{2^N} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^N} \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon \leqslant g(x) \leqslant \varepsilon$$
   Soit $\eta = \frac{1}{2^N}$. Alors $\eta > 0$, et :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -\eta \leqslant x \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon \leqslant g(x) \leqslant \varepsilon.$$
   On a donc démontré :
   $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (|x| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |g(x)| \leqslant \varepsilon)$$
   Ceci signifie exactement que g est continue en 0.
   Comme $f(x) = g(x) + f(0)$ alors par somme f est continue en 0.

4. *(0,5 point)* Si f est croissante et vérifie la relation $(\star)$ alors f est continue en 0 et elle vérifie la relation $(\star)$, donc d'après la question précédente f est une fonction affine $x \mapsto ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Comme elle est croissante alors $a \geqslant 0$.
Les solutions du problème croissantes sont donc les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Problème 3. Suites de Cauchy *(15 points)*

Partie A. Le critère de Cauchy *(6 points)*

1. (a) *(1 point)* Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si il existe un réel ℓ tel que :
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$
Le réel ℓ est alors unique, il est appelé *limite* de (u_n).

   (b) *(2 points)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, et soit ℓ sa limite.
Démontrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors :
$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \left(n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$
Soit p et q deux entiers. D'après ce qui précède, si $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$ alors :
$$|u_p - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad |u_q - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
D'après l'inégalité triangulaire :
$$|(u_p - \ell) - (u_q - \ell)| \leqslant |u_p - \ell| + |u_q - \ell|$$
On en déduit :
$$|u_p - u_q| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
On a donc démontré que :
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall (p, q) \in \mathbb{N} \quad (p \geqslant N \quad \text{et} \quad q \geqslant N) \implies |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy.

2. (a) *(1 point)* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc en particulier pour $\varepsilon = 1$, comme $\varepsilon > 0$ alors :
$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall (p, q) \in \mathbb{N} \qquad (p \geqslant N \quad \text{et} \quad q \geqslant N) \implies |u_p - u_q| \leqslant 1$$
Si $q = N$ alors $q \geqslant N$ donc :
$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N} \qquad p \geqslant N &\implies |u_p - u_N| \leqslant 1 \\ &\implies u_N - 1 \leqslant u_p \leqslant u_N + 1 \end{aligned}$$
Tous les termes u_n de la suite pour $n \geqslant N$ sont dans l'intervalle $[u_N - 1, u_N + 1]$, donc ils forment un ensemble borné.
Les termes pour $0 \leqslant n < N$ sont en nombre fini donc ils forment un ensemble borné également.
Finalement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(b) *(2 points)* La suite (u_n) est bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une suite extraite convergente.

Notons $(u_{\varphi(n)})$ une telle suite, c'est-à-dire que $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

Soit ℓ la limite de la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$.

Démontrons que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Comme la suite (u_n) est une suite de Cauchy alors :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N} \qquad (p \geqslant N_1 \quad \text{et} \quad q \geqslant N_1) \quad \Longrightarrow \quad |u_p - u_q| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit n un entier supérieur ou égal à N_1. Comme la fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante alors par propriété $\varphi(n) \geqslant n$, et donc $\varphi(n) \geqslant N_1$.

Comme $n \geqslant N_1$ et $\varphi(n) \geqslant N_1$ alors : $\left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ alors par définition de la convergence il existe un entier N_2 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N_2 \quad \Longrightarrow \quad \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $N_0 = \text{Max}\,\{N_1, N_2\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_0$ alors $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant N_2$ donc :

$$\left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Par inégalité triangulaire :

$$\left|(u_n - u_{\varphi(n)}) + (u_{\varphi(n)} - \ell)\right| \leqslant \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ceci donne : $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

Nous avons démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N_0 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Ceci signifie que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Ainsi toute suite de Cauchy est convergente.

Partie B. Vers une construction de $\mathbb{R}$ *(3 points)*

1. *(1 point)* Par définition $\mathcal{C}$ est l'ensemble des suites de Cauchy à valeurs rationnelles, donc $\mathcal{C}$ est inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites réelles.

   L'ensemble $\mathcal{C}$ est non-vide, car il contient au moins la suite nulle, qui est de Cauchy puisqu'elle converge vers 0, et dont les termes sont rationnels.

   La somme et le produit de deux rationnels est un rationnel donc la somme et le produit de deux suites de rationnels sont des suites de rationnels.

   La somme et le produit de deux suites convergentes sont convergentes, donc la somme et le produit de deux suites de Cauchy sont de Cauchy.

   Nous avons justifié que :

   $$\forall((u_n),v_n)\in\mathcal{C}^2 \qquad (u_n)+(v_n)\in\mathcal{C} \quad \text{et} \quad (u_n)(v_n)\in\mathcal{C}$$

   Donc $\mathcal{C}$ est stable par addition et multiplication.

   L'opposé d'un rationnel est un rationnel, donc la suite opposée d'une suite de rationnels est une suite de rationnels.

   De même la suite opposée d'une suite convergente est convergente, donc la suite opposée d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

   Nous avons justifié que :

   $$\forall(u_n)\in\mathcal{C} \qquad -(u_n)\in\mathcal{C}$$

   Donc $\mathcal{C}$ est stable par passage à l'opposé.

   Enfin la suite constante égale à 1, qui est l'unité de l'anneau $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\times\right)$, est une suite de rationnels convergente, donc de Cauchy, et ainsi elle appartient à $\mathcal{C}$.

   Toutes ces propriétés montrent que $\mathcal{C}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. *(1 point)* Si (u_n) appartient à $\mathcal{C}$ alors (u_n) est une suite de Cauchy, donc elle converge, *i.e.,* elle admet une limite. Ceci montre que f est bien définie.

   Soit (u_n) et (v_n) sont deux éléments de $\mathcal{C}$. Alors ces suites sont des suites de Cauchy, donc elles convergent. Notons ℓ et k leurs limites.

   Par propriété les suites $(u_n)+(v_n)$ et $(u_n)(v_n)$ convergent respectivement vers $\ell+k$ et ℓk, ce qui montre que :

   $$\begin{aligned} & f((u_n)+(v_n)) = \lim\left((u_n)+(v_n)\right) = \ell+k = \lim(u_n)+\lim(v_n) = f(u_n)+f(v_n) \\ \text{et} \quad & f((u_n)(v_n)) \quad = \lim\left((u_n)(v_n)\right) \quad = \ell k \quad = \lim(u_n)\times\lim(v_n) = f(u_n)f(v_n) \end{aligned}$$

   L'unité de l'anneau $\mathcal{C}$ est la suite constante égale à 1. Elle converge vers le réel 1, donc $f(1_{\mathcal{C}})=1_{\mathbb{R}}$.

   Ces propriétés montrent que f est un morphisme d'anneaux.

3. *(1 point)* Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors pour tout réel x il existe une suite (u_n) de rationnels convergeant vers x.

   Comme cette suite est convergente alors c'est une suite de Cauchy, donc elle appartient à $\mathcal{C}$.

   Comme elle converge vers x alors son image par f est x.

   Nous avons démontré que pour tout $x\in\mathbb{R}$ il existe $(u_n)\in\mathcal{C}$ tel que $f(u_n)=x$, donc f est surjective.

Partie C. Anneau quotient *(6 points)*

1. (a) *(0,5 point)* Comme $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux alors c'est *a fortiori* un morphisme de groupes.
   Par propriété le noyau d'un morphisme de groupes est un sous-groupe de son groupe de départ, donc I est un sous-groupe de $(A, +)$.

   (b) *(0,5 point)* Soit $a \in A$ et $x \in I$. Comme $I = \ker f$ alors $f(x) = 0_B$.
   Comme f est un morphisme d'anneaux alors $f(ax) = f(a)f(x)$, ce qui donne $f(ax) = f(a) \times 0_B = 0_B$, donc $ax \in \ker f = I$.
   On a démontré que que pour tout $a \in A$ et $x \in I$: $\quad ax \in I$.

2. *(1 point)* Soit a et b deux éléments de A.
   Supposons que $C(a) = C(b)$. Comme I est un sous-groupe de $(A, +)$ alors il contient 0_A, donc $b = b + 0_A \in C(b)$. Comme $C(a) = C(b)$ alors $b \in C(a)$, donc il existe $x \in I$ tel que $b = a + x$. Ceci donne $b - a = x$, donc $b - a \in I$.
   Réciproquement, supposons que $b - a \in I$ et démontrons que $C(a) = C(b)$.
   Soit $c \in C(a)$. Alors il existe $x \in I$ tel que $c = a + x$.
   On remarque que $c = b + (x - (b - a))$. Comme I est un sous-groupe de $(A, +)$ alors il est stable par addition et soustraction. Or $b - a \in I$ et $x \in I$ donc $x - (b - a) \in I$.
   Comme $c = b + (x - (b - a))$ et $(x - (b - a)) \in I$ alors $c \in C(b)$.
   De même on démontre que si $c \in C(b)$ alors $c \in C(a)$, donc $C(a) = C(b)$.
   Par double implication on a démontré que pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$C(a) = C(b) \quad \Longleftrightarrow \quad b - a \in I$$

3. (a) *(1 point)* L'opération $\overline{+}$ associe à deux éléments $C(a)$ et $C(b)$ de $\overline{A}$ un élément $C(a + b)$ qui appartient à $\overline{A}$, donc c'est une loi de composition interne de $\overline{A}$.
   De plus, comme $(A, +)$ est un groupe abélien alors :

$$\forall (a, b) \in A^2 \qquad C(a)\overline{+}C(b) = C(a + b) = C(b + a) = C(b)\overline{+}C(a)$$

   Ceci montre que la loi $\overline{+}$ est commutative.
   Enfin, comme la loi $+$ de A est associative alors :

$$\begin{aligned} \forall (a, b, c) \in A \qquad (C(a)\overline{+}C(b))\overline{+}C(c) &= C(a + b)\overline{+}C(c) = C((a + b) + c) \\ &= C(a + (b + c)) = C(a)\overline{+}C(b + c) \\ &= C(a)\overline{+}(C(b)\overline{+}C(c)) \end{aligned}$$

   Ceci montre que la loi $\overline{+}$ est associative.

   (b) *(0,5 point)* On remarque que $C(0_A) = I$, et :

$$\forall a \in A \qquad C(a)\overline{+}C(0_A) = C(a + 0_A) = C(a)$$

   Ceci montre que I est élément neutre de $\overline{A}$ pour la loi $\overline{+}$.

   (c) *(0,5 point)* Soit $a \in A$. Comme $(A, +)$ est un groupe alors $-a \in A$, et :

$$C(a) + C(-a) = C(a - a) = C(0_A) = I$$

   Ainsi $C(a)$ admet pour inverse $C(-a)$ pour la loi $\overline{+}$, et donc tout élément de $\overline{A}$ admet un inverse pour la loi $\overline{+}$.

4. *(0,5 point)* Les propriétés démontrées dans la question 3 montrent que $\left(\overline{A}, \overline{+}\right)$ est un groupe abélien.
   De plus on a admis que la loi $\overline{\times}$ est une loi de composition interne de $\overline{A}$, associative, commutative et distributive par rapport à la loi $\overline{+}$.
   Enfin $\overline{A}$ admet un élément unité pour la loi $\overline{\times}$. Cet élément est $C(1_A)$ car :

$$\forall a \in A \qquad C(a)\overline{\times}C(1_A) = C(a \times 1_A) = C(a)$$

   Finalement nous avons vérifié que $\left(\overline{A}, \overline{+}, \overline{\times}\right)$ est un anneau commutatif.

5. (a) *(0,5 point)* Soit a et a' deux éléments de A tels que $C(a) = C(a')$. Alors $a - a' \in I$, comme $I = \ker f$ alors $f(a-a') = 0_B$, puis $f(a)-f(a') = 0_B$ car f est un morphisme d'anneaux, et donc $f(a) = f(a')$.
   Ceci montre que la définition de $\varphi(C(a))$ ne dépend pas du choix du représentant a de $C(a)$, donc φ est bien définie.
   De plus :

$$\forall (a,b) \in A^2 \qquad \varphi(C(a)\overline{+}C(b)) = \varphi(C(a+b)) = f(a+b)$$

   Comme f est un morphisme d'anneaux alors $f(a+b) = f(a) + f(b)$, donc :

$$\forall (a,b) \in A^2 \qquad \varphi(C(a)\overline{+}C(b)) = f(a) + f(b) = \varphi(C(a)) + \varphi(C(b))$$

   De même on démontre :

$$\forall (a,b) \in A^2 \qquad \varphi(C(a)\overline{\times}C(b)) = \varphi(C(a)) \times \varphi(C(b))$$

   Enfin :

$$\varphi(1_{\overline{A}}) = \varphi(C(1_A)) = f(1_A) = 1_B$$

   En effet, f est un morphisme d'anneaux donc $f(1_A) = 1_B$.
   Nous avons donc démontré que φ est un morphisme d'anneaux.

   (b) *(0,5 point)* Par définition :

$$\ker\varphi = \left\{ C(a) \in \overline{A} \;\middle|\; \varphi(C(a)) = 0_B \right\}$$

   Par équivalence :

$$\varphi(C(a)) = 0_B \iff f(a) = 0_B \iff a \in I \iff C(a) = I$$

   Ceci montre que $\ker\varphi = \{I\}$, or nous savons que I est l'élément neutre de $\overline{A}$ pour la loi $\overline{+}$ donc $\ker\varphi = \{0_{\overline{A}}\}$.
   Par propriété ceci implique que φ est injective.

   (c) *(0,5 point)* Comme f est surjective alors pour tout $b \in B$ il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Alors $\varphi(C(a)) = b$, et donc b admet $C(a)$ pour antécédent par φ.
   Ceci montre que φ est surjective.
   Or φ est injective, donc φ est bijective.
   Finalement φ est un morphisme d'anneaux bijectif, donc φ est un isomorphisme d'anneaux.