Lycée Bellevue – Toulouse **5 avril 2024**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°6

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Le barème et indicatif.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Exercice. *(8 points)*

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{7}\left(\sqrt{x^7} - \sqrt{2-x^7}\right)$.

   Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 et donner la position de la courbe de f par rapport à cette tangente.

   Faire un dessin représentant ces données.
3. Donner le développement limité de la fonction sinus au voisinage de $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 2.

   En déduire le développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 1 de la suite définie par :

   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2\sin\frac{n\pi}{6n+1}$$

   puis la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 1. *(25 points)*

Partie A.

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on définit $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_4)$ avec :

$$u_1 = (0, 1, -1, 2) \qquad u_2 = (-1, 0, 2, 1) \qquad u_3 = (-1, 2, 0, 5) \qquad u_4 = (2, 1, -5, 0).$$

Soit $\quad G = \{ (x, y, z, t) \in E \mid x + 2y + z - t = 2x + y + z + t = 0 \}$.

1. Donner une base et la dimension de F et de G.
2. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Partie B.

Dans cette partie $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et soit n sa dimension.
Soit φ une forme linéaire non-nulle de E, et $H = \ker \varphi$.

1. Justifier qu'il existe $u_0 \in E$ tel que $\varphi(u_0) \neq 0$, puis $u_1 \in E$ tel que $\varphi(u_1) = 1$.

Dans la suite on notera $D = \text{Vect}(u_1)$.

2. Pour tout $u \in E$ on pose $p(u) = \varphi(u)u_1$.
   (a) Démontrer que p est un endomorphisme de E.
   (b) Démontrer que p est un projecteur de E.
   (c) Déterminer les éléments caractéristiques de ce projecteur.
   (d) Justifier que H et D sont supplémentaires dans E.

Soit ψ une autre forme linéaire non-nulle, et $K = \ker \psi$.
Comme précédemment, il existe $u_2 \in E$ tel que $\psi(u_2) = 1$.

3. On suppose que $H = K$ et on pose $\alpha = \psi(u_1)$, puis $\chi = \psi - \alpha\varphi$, *i.e.*, χ est la forme linéaire telle que pour tout $u \in E$: $\quad \chi(u) = \psi(u) - \alpha\varphi(u)$.
   (a) Démontrer que pour tout $u \in D$: $\quad \chi(u) = 0$.
   (b) Démontrer que pour tout $u \in H$: $\quad \chi(u) = 0$.
   (c) En déduire que φ et ψ sont proportionnelles.

On suppose maintenant que φ et ψ sont linéairement indépendantes, ce qui d'après la question précédente implique que $K \neq H$.

4. (a) Donner (avec démonstration) la dimension de H et de K en fonction de $n = \dim E$.
   (b) En déduire qu'il existe $w_1 \in K \setminus H$ et $w_2 \in H \setminus K$, puis qu'il existe $v_1 \in K$ tel que $\varphi(v_1) = 1$ et $v_2 \in H$ tel que $\psi(v_2) = 1$.
   (c) Démontrer que la famille (v_1, v_2) est libre.
5. On définit l'application $q : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & \varphi(u)v_1 + \psi(u)v_2. \end{array}$
   Démontrer que q est un projecteur de E. Déterminer son noyau et son image.

Partie A (suite).

On souhaite construire le projecteur de E sur F parallèlement à G.

3. Déterminer un vecteur de F vérifiant l'équation $x + 2y + z - t = 0$ mais pas l'équation $2x + y + z + t = 0$, puis un vecteur de F vérifiant l'équation $2x + y + z + t = 0$ mais pas l'équation $x + 2y + z - t = 0$.
4. À l'aide de la partie précédente construire le projecteur de E sur F parallèlement à G. Donner l'image du premier vecteur de la base canonique de E par ce projecteur.

Problème 2. Étude de suites implicites *(18 points)*

Dans ce problème on définit deux suites implicites $(x_n)_{n\geqslant 3}$ et $(y_n)_{n\geqslant 3}$ et on calcule un développement asymptotique de la première.

1. On rappelle la définition du logarithme népérien : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

   Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

   (a) Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

   (b) Dans cette question on suppose que la valeur de e n'est pas connue.
   Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et en utilisant la question précédente en déduire que $\ln 3 \geqslant 1$.

Pour tout entier $n > 0$ on définit la fonction $f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - n\ln x. \end{array}$

2. (a) Déterminer les variations et les limites de f_n.

   (b) Démontrer que si $n \geqslant 3$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On note x_n et y_n ces deux solutions, avec $x_n < y_n$.

   (c) Démontrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 3}$ tend vers $+\infty$.

On étudie désormais la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ définie ci-dessus.

3. (a) Soit $n \geqslant 3$. Comparer $f_n(x_n)$ et $f_n(x_{n+1})$

   (b) Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ et en déduire qu'elle est convergente.

   (c) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$.

On définit maintenant la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

4. (a) Calculer le développement limité de φ au voisinage de 1 à l'ordre 3.

   (b) Donner la valeur de $\varphi'(1)$.
   En déduire qu'il existe un voisinage V de 1 tel que la fonction φ réalise une bijection de V dans $\varphi(V)$.
   On note dans la suite ψ la fonction réciproque de cette bijection.

5. (a) Justifier que ψ admet un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3, et que celui-ci est de la forme $\psi(x) \underset{(0)}{=} 1 + ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$.

   (b) Calculer ce développement limité.

6. Donner un développement asymptotique de x_n à l'ordre 3.