Corrigé du Devoir à la Maison n°9

Exercice 1.

1. Soit f une solution du problème, c'est-à-dire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x)+f(y)). \qquad (\star)$$
Soit $\alpha = f(0)$ et $\beta = f(1)$.
   (a) Pour $x = 0$ et $y = 2$ la relation $(\star)$ donne : $2f(1) = f(0) + f(2)$.
   Donc $f(2) = 2\beta - \alpha$.
   (b) Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : $f(n) = \beta n + \alpha(1-n)$.
   Démontrons par récurrence double que cette proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   <u>Initialisation.</u> Comme $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$ alors les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.
   <u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ les propositions $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies :
   $$f(n) = \beta n + \alpha(1-n) \qquad \text{et} \qquad f(n+1) = \beta n + \beta - \alpha n.$$
   La relation $(\star)$ pour $x = n$ et $y = n+2$ donne $2f(n+1) = f(n) + f(n+2)$ donc :
   $$\begin{aligned} f(n+2) = 2f(n+1) - f(n) &= \beta(n+2) + \alpha(-1-n) \\ &= \beta(n+2) + \alpha(2-(n+1)). \end{aligned}$$
   La relation $\mathcal{P}_{n+2}$ est donc vraie.
   Ceci justifie l'hérédité.
   <u>Conclusion.</u> Par récurrence double la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   En posant $a = \beta - \alpha$ et $b = \alpha$ on obtient :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) = an + b.$$
   (c) Soit $n \in \mathbb{Z}$.
   Si $n \geqslant 0$ alors d'après ce qui précède : $f(n) = an + b$.
   Supposons que $n < 0$. Alors $-n \geqslant 0$ donc $f(-n) = -an + b$.
   Le relation $(\star)$ pour $x = n$ et $y = -n$ donne $2f(0) = f(n) + f(-n)$, donc :
   $$f(n) = 2f(0) - f(-n) = 2b - (-an + b) = an + b.$$
   On a démontré :
   $$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad f(n) = an + b.$$

(d) Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{P}_n : f\left(\frac{p}{2^n}\right) = a\frac{p}{2^n} + b$.

On démontre par récurrence sur n que cette proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Comme $p \in \mathbb{Z}$ alors $f(p) = ap + b$ d'après la question précédente.

Ceci démontre que la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie.

La relation $(\star)$ pour $x = \frac{p}{2^n}$ et $y = 0$ donne $f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{p}{2^n}\right) + f(0)\right)$ donc :

$$f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(a\frac{p}{2^n} + 2b\right) = a\frac{p}{2^{n+1}} + b.$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

L'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) Soit x un réel et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$.

Par définition de la partie entière :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2^n x - 1 < \lfloor 2^n x \rfloor \leqslant 2^n x.$$

Comme $2^n > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x - \frac{1}{2^n} < x_n \leqslant x.$$

Par théorème d'encadrement, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(x - \frac{1}{2^n}\right) = x$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

La fonction f est continue par hypothèse, donc par composition de limites la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

La partie entière d'un réel est un entier relatif, donc d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(x_n) = f\left(\frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}\right) = a\frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} + b = ax_n + b.$$

Comme la suite (x_n) converge vers x alors la suite $(ax_n + b)$ converge vers $ax + b$.

Par unicité de la limite $f(x) = ax + b$.

Finalement on a démontré : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b$.

La fonction f est une fonction affine.

2. D'après la question précédente, si f est solution du problème alors f est une fonction affine. Démontrons la réciproque.

Soit f une fonction affine : il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b$.

Alors la fonction f est continue, et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) = \frac{1}{2}(ax + b + ay + b) = a\frac{x+y}{2} + b = f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

La fonction f satisfait donc la relation $(\star)$.

Par analyse-synthèse, les solutions du problème sont les fonctions affines.

Exercice 2.

1. Par définition A est une partie de $\mathbb{R}_+^*$, donc elle est minorée par 0.

   Comme f est périodique alors elle admet une période T strictement positive. Ce réel appartient à A, donc A est non-vide.

   Ainsi A est une partie non-vide minorée de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne inférieure, que l'on note t.

2. Soit T une période de f.

   Comme f est continue alors par théorème des valeurs extrêmes f est bornée sur tout segment. Donc elle est bornée sur le segment $[0, T]$

   Comme f est T-périodique alors elle est bornée sur tout segment $[kT, (k+1)T]$ où $k \in \mathbb{Z}$.

   Elle est donc bornée sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [kT, (k+1)T] = \mathbb{R}$.

   On note a sa borne inférieure et b sa borne supérieure.

3. On suppose que $t = 0$.

   (a) On rappelle que $t = \text{Inf } A$. Ainsi 0 est le plus grand minorant de A.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $0 < \frac{1}{n}$ alors $\frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de A, donc il existe $\tau \in A$ tel que $\tau < \frac{1}{n}$.

   Comme $\tau \in A$ alors τ est une période de f.

   D'après le théorème des valeurs extrêmes f est bornée sur le segment $[0, \tau]$ et elle y atteint ses bornes. Par périodicité les bornes de f sur ce segment sont les bornes de f sur $\mathbb{R}$, à savoir a et b.

   Il existe donc $x_n \in [0, \tau]$ et $y_n \in [0, \tau]$ tels que $f(x_n) = a$ et $f(y_n) = b$.

   Comme $\tau < \frac{1}{n}$ alors x_n et y_n appartiennent à l'intervalle $\left[0, \frac{1}{n}\right[$.

   (b) Par construction :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant x_n < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y_n < \frac{1}{n}.$$

   Par théorème de comparaison :

   $$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

   Comme f est continue alors :

   $$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(0).$$

   Or $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ sont constantes, égales à a et b respectivement.

   Donc $f(0) = a = b$.

   Ceci montre que $\text{Inf } f = \text{Sup } f$, donc f est constante.

   Or par énoncé f n'est pas constante : on obtient une contradiction.

   Cette contradiction montre que $t \neq 0$.

   Comme $t = \inf A$ est $A \subseteq \mathbb{R}_+^*$ alors $t \geqslant 0$, donc on peut en déduire que t est strictement positif : $t > 0$.

4. Soit $H = \{\tau \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+\tau) = f(x)\}$.
   - Par définition : $H \subseteq \mathbb{R}$.
   - Il est évident que $0 \in H$, car : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x)$.
   - Soit $(\tau, \sigma) \in H^2$. Alors :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+\tau) = f(x) \qquad \text{et} \qquad f(x+\sigma) = f(x).$$
   Donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+\tau+\sigma) = f(x+\tau) = f(x).$$
   Ceci montre que $\tau + \sigma \in H$, donc H est stable par addition.
   - Soit $\tau \in H$. Alors :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+\tau) = f(x).$$
   Donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x-\tau) = f(x-\tau+\tau) = f(x).$$
   Ceci montre que $-\tau \in H$, et donc H est stable par passage à l'opposé.

   Les points ci-dessus montrent que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

5. On suppose que $t \notin A$.
   (a) On rappelle que $t = \operatorname{Inf} A$, donc t est le plus grand minorant de A.
   On a démontré que $t > 0$, donc $2t > t$, ce qui montre que $2t$ n'est pas un minorant de A, et donc il existe $\tau_1 \in A$ tel que $\tau_1 < 2t$.
   Comme $\tau_1 \in A$ alors $\tau_1 \geqslant \operatorname{Inf} A$, *i.e.*, $\tau_1 \geqslant t$, et comme $t \notin A$ alors $\tau_1 > t$.
   Ainsi $\tau_1 \in \,]t, 2t[$.
   De plus, comme $A \subseteq H$ alors $\tau_1 \in H$, et ainsi $\tau_1 \in H \cap \,]t, 2t[$.
   Comme $\tau_1 > t$ alors τ_1 n'est pas un minorant de A, donc il existe $\tau_2 \in A$ tel que $\tau_2 < \tau_1$.
   Comme $\tau_2 \in A$ alors $\tau_2 > t$ et donc $\tau_2 \in \,]t, \tau_1[\, \cap H$.
   (b) On sait que τ_1 et τ_2 sont deux éléments de H, qui est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et donc est stable par soustraction.
   Ainsi $\tau_1 - \tau_2 \in H$.
   On a vu que $\quad t < \tau_1 < 2t \quad$ et $\quad t < \tau_2 < \tau_1$.
   Comme $\quad \tau_2 < \tau_1 \quad$ alors $\quad \tau_1 - \tau_2 > 0$.
   Comme $\quad -\tau_2 < -t \quad$ et $\quad \tau_1 < 2t \quad$ alors $\quad \tau_1 - \tau_2 < t$.
   Donc : $\quad 0 < \tau_1 - \tau_2 < t$.
   Ainsi $\quad \tau_1 - \tau_2 \in \mathbb{R}_+^* \quad$ et $\quad \tau_1 - \tau_2 \in H \quad$ donc $\quad \tau_1 - \tau_2 \in H \cap \mathbb{R}_+^* = A$.
   Mais $\quad \tau_1 - \tau_2 < t = \operatorname{Inf} A$.
   Finalement $\tau_1 - \tau_2$ est un élément de A strictement inférieur à sa borne inférieure, c'est absurde.

   Cette contradiction montre que $t \in A$.

6. Comme $t \in A$ alors t est une période de f.
   Comme $t = \operatorname{Inf} A$ alors f n'est τ-périodique pour aucun réel $\tau \in \,]0, t[$, et donc t est la plus petite période de f.