Devoir Surveillé n°5

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Le barème est indicatif.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Problème 1. Une équation fonctionnelle *(8 points)*

Le but de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x + y) = f(x) + f(y) + xy.$$

Soit f une telle fonction.

1. Calculer $f(0)$.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f(-x) = -f(x) + x^2$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$f(nx) = nf(x) - \tfrac{1}{2}nx^2 + \tfrac{1}{2}n^2x^2.$$

4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Q}$:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x + f(1)x.$$

5. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

6. Conclure : déterminer l'ensemble des solutions du problème, sans oublier la synthèse.

Problème 2. Une suite implicite *(15 points)*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$ et que $u_n \sim v_n \ln v_n$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ln v_n \leqslant v_n$.
   (b) En déduire que (v_n) tend vers $+\infty$.
   (c) Déterminer la limite de $\ln\left(\frac{u_n}{v_n \ln v_n}\right)$ et en déduire que $\ln u_n \sim \ln v_n$.
   (d) Démontrer que $v_n \sim \frac{u_n}{\ln u_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \ln x. \end{array}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+^*$, et que cette solution est strictement supérieure à 1.

On note x_n cette solution. Elle vérifie donc $f_n(x_n) = 1$.

3. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. En déduire qu'elle est convergente.
5. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $n = \frac{\ln\left(\frac{1}{\ln x_n}\right)}{\ln x_n}$.
   En utilisant la première question de ce problème, démontrer que $\frac{1}{\ln x_n} \sim \frac{n}{\ln n}$.
7. En déduire un équivalent simple de $(x_n - 1)$.

Problème 3. Une équation de Pell-Fermat *(20 points)*

Le but de ce problème est de résoudre l'équation suivante d'inconnues a, $b \in \mathbb{N}$:

$$a^2 = 2b^2 + 1 \qquad (E)$$

Pour ceci on note :

$$S = \left\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - 2b^2 = 1\right\}.$$

Les solutions de l'équation (E) sont donc les couples (a, b) de S tels que $b \geqslant 0$.

On note $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on définit $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis on pose :

$$G = \{aI_2 + bJ \mid (a, b) \in S\}.$$

On rappelle que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de taille $(2, 2)$ à coefficients réels, et que $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe, où $\times$ désigne la multiplication des matrices.

1. Dans cette question on démontre que G est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.
   (a) Soit $M \in G$, c'est-à-dire $M = aI_2 + bJ$ où (a, b) est un élément de S.
   Démontrer que M est inversible et que $M^{-1} \in G$.
   (b) Démontrer que G est stable par multiplication.
   (c) Compléter la démonstration.

On note maintenant $A = 3I_2 + 2J = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad A^n \in G$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note (a_n, b_n) l'élément de S tel que $A^n = a_n I_2 + b_n J$.

3. (a) Donner une expression de a_{n+1} et de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (a_n, b_n) \in S$.
   En déduire trois solutions distinctes de l'équation (E).
4. (a) Donner une expression de a_{n+2} en fonction de a_{n+1} et a_n.
   (b) En déduire le terme général de a_n.
   On notera λ_1 et λ_2 les racines de l'équation caractéristique.
   Le terme général de b_n se déduit de celui de a_n, il n'est pas nécessaire pour la suite du problème.

On souhaite maintenant démontrer que toutes les solutions de l'équation (E) sont des couples (a_n, b_n) où $n \in \mathbb{N}$.

5. On définit l'application N : $\begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ aI_2 + bJ & \longmapsto & a + b\sqrt{2}. \end{array}$
   (a) Démontrer que pour tout $(a, b) \in S$: $\quad N(aI_2 + bJ) \neq 0$.
   (b) Démontrer que N est un morphisme de groupes de $(G, \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.
6. Soit (a, b) un élément de S tel que $b \neq 0$.
   Vérifier que $|b| \neq 1$. En déduire que :
   - Si $b > 0$ alors $a \geqslant 3$ et donc $N(aI_2 + bJ) \geqslant 3 + 2\sqrt{2}$.
   - Si $b < 0$ alors $N(aI_2 + bJ) \leqslant 3 - 2\sqrt{2}$.

   On pourra considérer la matrice inverse de $aI_2 + bJ$.

On note $\rho = 3 + 2\sqrt{2}$.

7. Soit (c, d) une solution de (E), c'est-à-dire un élément de S tels que $d \geqslant 0$.
   On note $B = cI_2 + dJ = \begin{pmatrix} c & 2d \\ d & c \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad A^{-n}B \in G$.
   (b) Démontrer qu'il existe un entier m tel que $\rho^m \leqslant N(B) < \rho^{m+1}$.
   (c) En déduire que $1 \leqslant N(A^{-m}B) < \rho$.
   (d) Démontrer que $B = A^m$.
8. En conclusion, démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble $\{\, (a_n, b_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.