Corrigé du Devoir à la Maison n°8

Théorème de Cesàro monotone et applications

Partie A. Démonstration dans le cas monotone

1. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc elle admet une limite.

   Si elle n'était pas majorée cette limite serait $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. Or la suite (x_n) est convergente, donc elle est majorée.

   Par théorème la suite (u_n) est croissante majorée donc par théorème de la limite monotone elle converge vers sa borne supérieure.

   Ainsi la borne supérieure de la suite (x_n) est sa limite ℓ.
2. (a) Soit n un entier strictement positif. Comme la suite (x_n) est croissante alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad k < n \quad \Longrightarrow \quad x_k \leqslant x_n.$$

   Ceci donne :

$$\forall k = 0, \dots, n-1 \qquad x_k \leqslant x_n.$$

   Par somme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} x_n = n x_n.$$

   En divisant par n, qui est strictement positif, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad y_n \leqslant x_n.$$

   Ceci est le résultat attendu.

   (b) On calcule, pour un $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) x_k + \frac{1}{n+1} x_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n(n+1)} x_k + \frac{1}{n+1} x_n \\
&= \frac{1}{n+1}\left(x_n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right) = \frac{x_n - y_n}{n+1}
\end{aligned}$$

   D'après la question précédente $y_n \leqslant x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad y_{n+1} - y_n \geqslant 0.$$

   Ainsi la suite (y_n) est croissante.

(c) Par transitivité, comme $y_n \leqslant x_n$ et (x_n) est majorée par ℓ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad y_n \leqslant x_n \leqslant \ell.$$

Ainsi la suite (y_n) est majorée par ℓ.

La suite (y_n) est croissante majorée, donc par théorème elle converge.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit :

$$2y_{2n} - y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} x_k.$$

Comme la suite x_k est croissante alors :

$$\forall k \in \{n, \dots, 2n-1\} \qquad x_k \geqslant x_n.$$

Par somme :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} x_k \geqslant \sum_{k=n}^{2n-1} x_n = n x_n.$$

Ceci donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 2y_{2n} - y_n \geqslant x_n.$$

(b) Soit ℓ' la limite de la suite (y_n).

La suite (y_{2n}) est extraite de la suite (y_n) qui converge vers ℓ', donc par théorème elle converge vers ℓ'.

On a démontré dans la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 2y_{2n} - y_n \geqslant x_n.$$

Par théorème de comparaison :

$$2\ell' - \ell' \geqslant \ell.$$

Ceci donne $\ell' \geqslant \ell$. De plus, comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad y_n \leqslant x_n$$

alors par théorème de comparaison :

$$\ell' \leqslant \ell.$$

Finalement $\ell = \ell'$, la suite (y_n) converge vers la même limite que la suite (x_n).

Ceci démontre le théorème de Cesàro dans le cas où la suite (x_n) est croissante.

4. Supposons que la suite (x_n) est décroissante. Alors la suite $(-x_n)$ est croissante, et elle converge vers $-\ell$. On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad z_n = \frac{-x_0 - x_1 - \cdots - x_{n-1}}{n}.$$

D'après ce qui précède, comme la suite $(-x_n)$ est croissante et converge vers $-\ell$ alors la suite (z_n) converge vers $-\ell$.

En conséquence la suite $(y_n) = (-z_n)$ converge vers ℓ, ce qui démontre le théorème dans le cas où la suite (x_n) est décroissante.

Partie B.

1. Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.
   Si $x > 0$ alors $h(x)$ est défini, c'est un réel positif.
   Ainsi l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ est stable par la fonction h.
   Or $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la suite (a_n) est définie par la relation de récurrence $a_{n+1} = h(a_n)$.
   Par propriété la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et incluse dans l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc strictement positive.
2. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{1+a_n}} \leqslant 1.$$
   Ceci montre que la suite (a_n) est décroissante.
   Or elle est minorée par 0, donc par théorème elle converge.
   Soit ℓ sa limite. On sait que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} = h(a_n).$$
   La suite (a_{n+1}) converge vers ℓ car elle est extraite de la suite (a_n), la suite $(h(a_n))$ converge vers $h(\ell)$ car la fonction h est continue. Par unicité de la limite $\ell = h(\ell)$.
   Ceci donne :
$$\ell\Big(\sqrt{1+\ell} - 1\Big) = 0.$$
   Ainsi $\ell = 0$ ou $\sqrt{1+\ell} = 1$, ce qui donne dans les deux cas $\ell = 0$.
   Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. (a) La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $1+x$ est strictement positif sur cet intervalle. Par composition, somme et quotient la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée est :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = \frac{-2 - x + 2\sqrt{1+x}}{2x^2\sqrt{1+x}}.$$
   Par équivalences :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) \leqslant 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{1+x} \leqslant 2+x \\ &\Longleftrightarrow \quad 4+4x \leqslant 4+4x+x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant x^2.\end{aligned}$$
   Cette dernière égalité étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ et f est décroissante sur cet intervalle.

   (b) La relation de récurrence pour a_n donne :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n = \frac{\sqrt{1+a_n}}{a_n} - \frac{1}{a_n} = f(a_n).$$
   La limite de f en 0 est calculée de la façon suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = \frac{(1+x)-1}{x\Big(\sqrt{1+x}+1\Big)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \quad \xrightarrow[x\to 0]{} \quad \frac{1}{2}$$

On sait que $b_n = f(a_n)$ et que (a_n) converge vers 0. Par composition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}.$$

(c) La suite (a_n) est décroissante, la fonction f est décroissante, donc la suite (b_n) est croissante. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \geqslant a_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad f(a_n) \leqslant f(a_{n+1}) \quad \Longrightarrow \quad b_n \leqslant b_{n+1}.$$

4. La suite (b_n) est croissante et converge vers $\frac{1}{2}$. D'après le théorème de Cesàro dans le cas monotone la suite (c_n) converge aussi vers $\frac{1}{2}$.

Or par télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} b_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0}\right).$$

Comme $\left(\frac{1}{na_0}\right)$ converge vers 0 et (c_n) converge vers $\frac{1}{2}$ alors $\left(\frac{1}{na_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{2}$.

On en déduit que $\left(\frac{na_n}{2}\right)$ converge vers 1 et enfin :

$$\boxed{a_n \sim \frac{2}{n}.}$$

Partie C.

La fonction $g : x \mapsto x + \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Si x est un réel strictement positif alors $g(x)$ est défini et strictement positif, donc l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est stable par g.

Or $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la suite (u_n) satisfait la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$, donc par propriété elle est bien définie et strictement positive.

1. La suite (u_n) est croissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} \geqslant 0.$$

Supposons qu'elle est majorée. Alors par théorème elle est convergente.

Soit ℓ sa limite. Comme précédemment, la relation $u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$ et la continuité de la fonction $x \mapsto x + \sqrt{x}$ montre que $\ell = \ell + \sqrt{\ell}$, donc $\ell = 0$.

Comme la suite (u_n) est strictement croissante alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_0 \leqslant u_n.$$

Par théorème de comparaison ceci donne $u_0 \leqslant \ell$, ce qui est absurde car $u_0 > 0$.

Cette contradiction montre que la suite (u_n) n'est pas majorée.

Elle est croissante non majorée donc par théorème elle tend vers $+\infty$.

2. La relation de récurrence pour (u_n) donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{u_n + \sqrt{u_n}}}.$$

Comme $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$ alors v_n est positif et $u_n = \frac{1}{v_n^2}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v_n^2} + \frac{1}{v_n}}} = \frac{v_n}{\sqrt{1 + v_n}}.$$

Ainsi la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence de la suite (a_n) de la partie précédente, et on a bien $v_0 > 0$.

Le résultat de la partie précédente montre que $v_n \sim \frac{2}{n}$.

Comme $u_n = \frac{1}{v_n^2}$ alors :

$$\boxed{u_n \sim \frac{n^2}{4}.}$$

Partie D. Cas général

1. (a) *(i)* Comme $\varepsilon > 0$ alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$.

La suite (x_n) converge vers 0 donc par définition il existe un entier N_1 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N_1 \quad \Longrightarrow \quad |x_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

(ii) La suite (x_n) est convergente, donc par théorème elle est bornée Or une suite (x_n) est bornée si et seulement si la suite $(|x_n|)$ est majorée. Ainsi la suite $(|x_n|)$ est majorée, et on peut lui choisir un majorant M. On a alors $M \geqslant 0$.

(b) Par inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |y_n| = \left|\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}(|x_1| + \cdots + |x_n|).$$

Soit n un entier non-nul supérieur à N_1.

Soit k un entier compris entre 0 et $n-1$: $\quad 0 \leqslant k \leqslant n-1$

- Si $0 \leqslant k \leqslant N_1 - 1$ alors $|x_k| \leqslant M$ d'après le point *(ii)* de la question précédente.
- Si $N_1 \leqslant k \leqslant n-1$ alors $|x_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ d'après le point *(i)* de la question précédente.

Ceci montre que si $n \geqslant N_1$ alors :

$$\begin{aligned} |y_n| &\leqslant \frac{1}{n}(|x_0| + \cdots + |x_{N_1-1}| \;+\; |x_{N_1}| + \cdots + |x_{n-1}|) \\ &\leqslant \frac{1}{n}\Big(N_1 M + (n - N_1)\frac{\varepsilon}{2}\Big). \end{aligned}$$

On obtient bien l'inégalité demandée.

(c) Comme $\varepsilon > 0$ alors le réel $\frac{2N_1M}{\varepsilon}$ existe bien, et donc il existe un entier N_2 qui lui est supérieur. On peut poser par exemple $N_2 = \left\lfloor \frac{2N_1M}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.

Posons $N = \mathrm{Max}\,\{N_1, N_2\}$.

Soit n un entier supérieur ou égal à N. Alors n est supérieur ou égal à N_1 et à N_2.

Comme $n \geqslant N_1$ alors d'après la question précédente :

$$|y_n| \leqslant \frac{N_1 M}{n} + \frac{n - N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $n \geqslant N_2$ alors :

$$n \geqslant \frac{2N_1 M}{\varepsilon} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \frac{N_1 M}{n}.$$

On a utilisé le fait que ε et n sont strictement positifs.

On a également l'inégalité :

$$\frac{n - N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc finalement :

$$|y_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cette inégalité est vraie pour tout $n \geqslant N$, donc à partir du rang N.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0, et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par l'énoncé du théorème.

   Soit ε un réel strictement supérieur à 0. La question 1.(c) démontre l'existence d'un entier N tel que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |y_n| \leqslant \varepsilon.$$

   Ceci est vrai pour tout réel ε strictement positif, donc par définition la suite (y_n) converge vers 0.

   Le théorème est démontré si $\ell = 0$.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un réel ℓ et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie dans l'énoncé du théorème.

   Soit $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x'_n = x_n - \ell.$$

   Soit $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad y'_n = \frac{x'_0 + \cdots + x'_{n-1}}{n}.$$

   Comme la suite (x_n) converge vers ℓ, alors la suite (x'_n) converge vers 0. Par application du théorème dans le cas où $\ell = 0$, lequel a été démontré dans la question précédente, la suite (y'_n) converge vers 0.

   Or :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad y'_n = \frac{x_1 - \ell + x_2 - \ell + \cdots + x_n - \ell}{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - \ell = y_n - \ell.$$

   Ainsi $y_n = y'_n + \ell$. Comme la suite (y'_n) converge vers 0 alors la suite (y_n) converge vers ℓ, et le théorème est démontré.