Feuille de T. D. B6
Structures algébriques

Exercices de cours

(1) Soit $*$ une loi de composition interne sur un ensemble E. On suppose que E admet un élément neutre e pour $*$ et que la loi $*$ est associative.

Démontrer si un élément x de E admet un symétrique alors celui-ci est unique.

(2) Soit E un ensemble.

Quels sont les éléments symétrisables de $\mathcal{P}(E)$ pour la loi $\cap$? Pour la loi $\cup$?

(3) Démontrer que l'ensemble $\mathbb{U}$ muni de la multiplication est un groupe.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{U}_n$ muni de la multiplication est un groupe.

(4) Soit $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \circ)$ le groupe des bijections de $\mathbb{R}$.

Démontrer que l'ensemble Aff des applications affines $x \mapsto ax + b$ telles que a est non-nul est un sous-groupe de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Est-il commutatif ?

(5) a. Justifier que les applications suivantes sont des morphismes de groupes.

$$\begin{aligned} f_1 : (\mathbb{Z}, +) &\longrightarrow (\mathbb{Z}, +) \\ n &\longmapsto 3n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : (\mathbb{Z}, +) &\longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times) \\ n &\longmapsto j^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 : (\mathbb{C}^*, \times) &\longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times) \\ z &\longmapsto |z| \end{aligned}$$

b. Déterminer le noyau et l'image de ces morphismes.
Lesquels sont injectifs ? Surjectifs ?

(6) Soit $A = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pourquoi le triplet $(A, +, \circ)$ n'est-il pas un anneau ?

(7) Démontrer que dans un anneau intègre A on peut simplifier par un élément non-nul :

Soit $a \in A \setminus \{0_A\}$. Alors :

$$\forall (x, y) \in A^2 \qquad ax = ay \implies x = y$$
$$\text{et} \qquad xa = ya \implies x = y$$

(8) Démontrer que le seul sous-anneau de $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Z}$ lui-même.

Travaux dirigés

1 Soit E un ensemble muni de deux lois de composition interne $\star$ et $\circ$, admettant chacune un élément neutre, noté e pour $\star$ et f pour $\circ$. On suppose que :

$$\forall (x, y, z, t) \in E^4 \qquad (x \star y) \circ (z \star t) = (x \circ z) \star (y \circ t)$$

a. Démontrer que $e = f$.
b. Démontrer que les lois $\star$ et $\circ$ sont égales.
c. Démontrer que cette loi est commutative et associative.

2 Soit $I =]-1, 1[$. On définit :

$$\forall (x, y) \in I^2 \qquad x \oplus y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

a. Démontrer que $\oplus$ est une loi de composition interne de I.
b. Démontrer que le couple $(I, \oplus)$ est un groupe.
c. Calculer les itérés de $\frac{1}{2}$.
d. Démontrer que l'application th : $(\mathbb{R}, +) \to (I, \oplus)$ est un isomorphisme de groupes.

3 Soit E un ensemble.

Les couples $(\mathcal{P}(E), \cap)$ et $(\mathcal{P}(E), \cup)$ sont-ils des groupes ?

4 Soit M une matrice de taille (n, n) où $n \in \mathbb{N}^*$, à coefficient dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Démontrer que

$$Z(M) = \{\, A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA \}$$

est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$.

5 Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e.

On suppose que pour tout $x \in G$: $\quad x^2 = e$

Démontrer que G est abélien.

6 Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e.

Soit x et y deux éléments de G tels que :

$$xyx = y \qquad \text{et} \qquad yxy = x$$

Démontrer que $x^2y^2 = e$ puis que $x^4 = y^4 = e$.

7 Soit $(G, *)$ un groupe fini.

a. Démontrer que dans la table de multiplication de G, chaque élément de G apparaît au plus une fois dans chaque colonne et dans chaque ligne.
b. En déduire que chaque élément de G apparaît une et une seule fois dans chaque colonne et dans chaque ligne de la table de multiplication.

8 Soit $(G,*)$ un groupe à trois éléments.

Soit e, a, b ses trois éléments, e étant le neutre.

Donner la table de multiplication de G.

Donner ensuite un exemple de tel groupe.

9 Soit $(G,*)$ un groupe à quatre éléments, et soit e son élément neutre.

a. On suppose que tout élément x de G vérifie $x^2 = e$. En notant e, a, b, c les éléments de G donner sa table de multiplication.
Le groupe G est-il commutatif ?

b. On suppose qu'il existe $a \in G$ tel que $a^2 \neq e$.
Donner la table de multiplication de G.

10 Soit $(G,*)$ un groupe.

a. Démontrer que les applications $g \mapsto ag$ et $g \mapsto ga$ sont des bijections de G.
Sont-elles des endomorphismes ?

b. Démontrer que l'application $g \mapsto aga^{-1}$ est un automorphisme de G.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $g \mapsto g^{-1}$ soit un automorphisme de groupes.

11 Soit G l'ensemble des bijections de l'ensemble $X = \{a, b, c\}$.

a. Justifier que $(G, \circ)$ est un groupe fini.

b. On note e l'élément neutre de G, et τ et σ les applications :

$$\tau : \begin{array}{l} a \mapsto b \\ b \mapsto a \\ c \mapsto c \end{array} \qquad \text{et} \qquad \sigma : \begin{array}{l} a \mapsto b \\ b \mapsto c \\ c \mapsto a \end{array}$$

Démontrer que :

$$G = \left\{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\right\}$$

Identifier l'élément $\sigma\tau$.

12 Le but de cet exercice est de déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

a. Démontrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

b. Démontrer que si $H \cap \mathbb{N}^*$ est non-vide alors il admet un minimum m, puis que $H = m\mathbb{Z}$.

c. Qu'en est-il si $H \cap \mathbb{N}^*$ est vide ?

d. Conclure.

13 Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non-nul. On définit l'application :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}(M + {}^tM) \end{array}$$

a. Justifier que f est un endomorphisme du groupe $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$.

b. Déterminer le noyau et l'image de f.

14 Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ muni de la loi $*$ définie par : $\forall((x,y),(x',y')) \in G^2$

$$(x,y) * (x',y') = (xx', yx' + y')$$

a. Démontrer que $(G,*)$ est un groupe.
Est-il abélien ?

b. Démontrer que $H = \{\,(x,0) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$ et $K = \{\,(1,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ sont deux sous-groupes abéliens de $(G,*)$.

c. Démontrer que les applications :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} (\mathbb{R}^*, \times) & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (x,0) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \psi : \begin{array}{rcl} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & G \\ y & \longmapsto & (1,y) \end{array}$$

sont des morphismes de groupes.

d. Donner les noyaux et les images de ces morphismes. Que retrouve-t-on ?

15 Soit $(G,*)$ un groupe, H un sous-groupe de G.
On définit la relation $\sim$ sur G par :

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad x^{-1}y \in H$$

a. Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

b. Soit $x \in G$ et $\mathrm{Cl}(x)$ sa classe d'équivalence.
Démontrer que $\mathrm{Cl}(x) = xH$.

c. Démontrer pour tout $x \in G$ l'application

$$m_x : \begin{array}{rcl} H & \longrightarrow & xH \\ h & \longmapsto & xh \end{array}$$

est bijective.

d. On suppose que G est un groupe fini. Démontrer que le cardinal de H divise celui de G.

16 Pour m et n entiers naturels non-nuls on pose :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{U}_n & \longrightarrow & \mathbb{U}_n. \\ z & \longmapsto & z^m \end{array}$$

a. Justifier que f est bien définie et que c'est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$.

b. Démontrer que le noyau de f est $\mathbb{U}_{m \wedge n}$.

17 Soit A un anneau, a et b deux éléments de A.

a. Démontrer que :

$$aba = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(a^2b = ba^2 = 1\right)$$

b. Démontrer que dans ce cas a et b sont inversibles et commutent.

18 Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}$ on pose :

$$x \oplus y = x + y - 1 \qquad x \otimes y = x + y - xy$$

a. Démontrer que $(\mathbb{R}, \oplus)$ est un groupe abélien.

b. Démontrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif.

c. Cet anneau est-il un corps ?

19 On note $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{ a + b\sqrt{2} \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$.

a. Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un corps.
On dit alors que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

20 Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

a. Démontrer que $\mathbb{D}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.

b. Démontrer que $(\mathbb{D},+,\times)$ est un anneau.
Est-il un corps ?

c. Décrire le groupe des inversibles de $\mathbb{D}$.

21 On note :

$$\mathbb{Z}[i] = \left\{ a + ib \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

a. Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ muni de l'addition et de la multiplication des complexes est un anneau.

b. Justifier que l'application $N : z \mapsto |z|^2$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $\left(\mathbb{R}_+^*,\times\right)$.

c. Vérifier que $N(\mathbb{Z}[i]) \subseteq \mathbb{N}$.
En déduire le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

22 Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire un sous-anneau de $\mathbb{C}$ qui est un corps.

Démontrer que $\mathbb{Q} \subseteq K$.

23 Démontrer que si un anneau intègre est fini alors c'est un corps.

On pourra considérer l'ensemble des a^k où $k \in \mathbb{N}$.

24 Soit K un corps et A un anneau. Démontrer que tout morphisme d'anneaux $f : K \to A$ est injectif.

25 On définit l'ensemble :

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

a. Démontrer que C est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.

b. Démontrer que C est un corps

c. Démontrer que ce corps est isomorphe à $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme d'anneaux de C dans $\mathbb{C}$.