Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 18 novembre 2024**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°4

1. Soit E, F deux ensembles, et $f : E \to F$, $g : F \to E$ deux applications.
   On suppose que $g \circ f$ est bijective.
   (a) Démontrer que f est injective.
   (b) Démontrer que g est surjective.
   (c) On suppose que f est bijective et on note $h = g \circ f$. Exprimer f^{-1} en fonction de g et h.

On définit les deux fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} [0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{1+\cos x} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,\pi[\\ x & \longmapsto & \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{array}$$

2. (a) Justifier que f et g sont bien définies.
   (b) Démontrer que f est injective mais non surjective.
   (c) Démontrer que g est surjective mais non injective.
   Inutile pour l'instant de dériver g.
   (d) Justifier que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies, puis les expliciter.
3. (a) Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
   (b) En déduire une expression simplifiée de g sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Tracer l'allure de la courbe de g, en justifiant votre construction.
4. On souhaite retrouver l'expression de g obtenue dans la question précédente.
   (a) Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Exprimer $g(\tan\theta)$ en fonction simple de θ.
   (b) En déduire une expression simplifiée de g sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Généraliser cette expression de g sur $\mathbb{R}$.