Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Feuille de T. D. B3
Logique

Exercices de cours

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Que dire des propositions suivantes ?

a. $\exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$

b. $\forall A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$

c. $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$

d. $\exists A \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$

(2) Énoncer en termes logiques les propositions suivantes pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. f est la fonction nulle.

b. f n'est pas la fonction nulle.

c. f s'annule.

d. f ne s'annule pas.

e. f est croissante.

f. f n'est pas croissante.

g. f est 2π-périodique.

h. f est périodique.

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Travaux dirigés

1 Donner la négation des propositions suivantes.

a. $x \leqslant 3$

b. $0 \leq x \leq 2$.

c. Robert joue à la pétanque tous les dimanches.

d. S'il pleut je prend un parapluie.

e. Les étudiants qui ont de bonnes moyennes sont contents et leurs parents aussi.

f. La nuit tous les chats sont gris.

2 Démontrer à l'aide d'une table de vérité que pour toutes propositions P et Q :

$$((P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q)) \;=\; (P \Leftrightarrow Q)$$

3 Démontrer à l'aide d'une table de vérité que pour toutes propositions P et Q :

$$(P \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)) = Q$$

Démontrer aussi ce résultat sans table de vérité.

4 Soit i et j deux entiers naturels. Démontrer que si $i + j > 7$ alors $i > 3$ ou $j > 4$.

5 Soit x un réel. Démontrer que si x^2 est irrationnel alors x est irrationnel.

6 Soit a et b deux réels. Démontrer que si

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant a \Longrightarrow x \leqslant b$$

alors $a \leqslant b$.

Donner la contraposée de cette propriété.

7 Soit x un réel. Démontrer que :

$$x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ |x| \leqslant \varepsilon$$

8 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y = x^2$

b. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y = x^2$

c. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y = x^2$

d. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y = x^2$

e. $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad y = x^2$

f. $\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y = x^2$

Pourquoi manque-t-il deux possibilités ?

9 Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes ainsi que leurs négations. Précisez lesquelles sont vraies.

a. Il existe un entier naturel multiple de tous les autres entiers naturels non-nuls.

b. Un réel est positif si et seulement si il est le carré d'un réel.

c. Trois réels étant donnés, deux au moins d'entre eux ont même signe. (Remarquer que deux réels x et y ont même signe si $xy \geqslant 0$)

d. La suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

10 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes ainsi que leurs négations.

a. f est l'identité de $\mathbb{R}$.

b. f admet un point fixe.

c. f est monotone.

d. f est injective.

e. f est surjective.

11 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

a. $\exists x \in \mathbb{R}\ (f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0)$

et $(\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}\ g(x) = 0)$

b. $\exists x \in \mathbb{R}\ (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$

et $(\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0)$ ou $(\exists x \in \mathbb{R}\ g(x) = 0)$

c. Répondre aux mêmes questions en remplaçant les $\exists$ par des $\forall$.

12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Démontrer que si $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante, alors f est strictement décroissante.

13 Démontrer que :

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 1 + \sum_{k=0}^{n-1} k.k! = n!$

b. Pour tout entier $n \geqslant 4$ $\quad 2^n \geqslant 3(n+1)$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{3k}\right) \geqslant \sqrt[3]{n+1}$

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad$ 7 divise $3^{2n+3} + 2^n$

14 On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

a. Donner une expression simple de $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la démontrer.

b. Même question avec $\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

15 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 9u_{n+1} - 20u_n$$

Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = a^n - b^n$$

16 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^3}{u_n^2}$$

17 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la donnée de u_0, u_1, u_2 et l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = 7u_{n+2} - 11u_{n+1} + 5u_n$$

a. On suppose que $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$. Déterminer le terme général de (u_n).

b. Même question avec $u_0 = 1$, $u_1 = 5$ et $u_2 = 25$.

18 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2$$

Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n.$

19 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad f(m+n) = f(m)f(n)$$

20 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) + 3f\left(\tfrac{1}{x}\right) = x^2$$

21 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

a. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$

b. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x$

c. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y$