Corrigé du Devoir à la Maison n°3

1. (a) Par définition un nombre complexe appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement si son module est égal à 1 :
$$\frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{U} \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$$
Les deux termes de cette dernière égalité sont positifs, donc :
$$\frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{U} \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2 = 1$$
La définition $|z|^2 = z\bar{z}$ du module d'un nombre complexe z donne :
$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2 = \frac{z-i}{z+i}\overline{\left(\frac{z-i}{z+i}\right)} = \frac{z-i}{z+i}\,\frac{\bar{z}-\bar{i}}{\bar{z}+\bar{i}} = \frac{(z-i)(\bar{z}+i)}{(z+i)(\bar{z}-i)} = \frac{z\bar{z}+iz-i\bar{z}+1}{z\bar{z}-iz+i\bar{z}+1}$$
Par équivalences successives :
$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{U} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{z\bar{z}+iz-i\bar{z}+1}{z\bar{z}-iz+i\bar{z}+1} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad z\bar{z}+iz-i\bar{z}+1 = z\bar{z}-iz+i\bar{z}+1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2iz = 2i\bar{z} \\ &\Longleftrightarrow \quad z = \bar{z} \\ &\Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
Le résultat est démontré.

(b) Soit A et B les points d'affixes respectives i et $-i$. Soit M un point d'affixe z. Alors :
$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{|z-i|}{|z-(-i)|} = \frac{AM}{BM}$$
Par équivalences successives :
$$\frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{U} \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{AM}{BM} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad AM = BM$$
L'ensemble des points du plan tels que $AM = BM$ est la médiatrice du segment $[AB]$. Comme A et B ont pour affixes respectives i et $-i$ alors cette médiatrice est l'axe des réels.
Ainsi $\frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{U}$ si et seulement si M est sur l'axe des réels, donc si et seulement si z est réel.
On retrouve bien le résultat de la question précédente.

2. On raisonne par équivalence successives :

$$(E_x) : \qquad \frac{i-z}{i+z} = e^{ix} \quad \Longleftrightarrow \quad i - z = ie^{ix} + ze^{ix} \quad \Longleftrightarrow \quad z\Big(1+e^{ix}\Big) = i\Big(1-e^{ix}\Big)$$

Si $1 + e^{ix} = 0$ alors cette équation devient $0 = 2i$, elle n'a pas de solution. Or l'égalité $1 + e^{ix} = 0$ équivaut à $x = \pi + 2k\pi$ où k est un entier.
Ceci montre que l'équation (E_x) n'a pas de solution si $x = \pi + 2k\pi$ pour un entier k.
Supposons maintenant que $x \neq \pi + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On poursuit alors les équivalences :

$$(E_x) \quad \Longleftrightarrow \quad z = i\,\frac{1-e^{ix}}{1+e^{ix}}$$

On introduit l'angle moitié :

$$i\,\frac{1-e^{ix}}{1+e^{ix}} = i\,\frac{e^{i\frac{x}{2}}\Big(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\Big)}{e^{i\frac{x}{2}}\Big(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}\Big)} = i\frac{-2i\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$$

On peut donc conclure que si x n'est pas de la forme $\pi + 2k\pi$ avec k entier alors l'équation admet pour solution :

$$\boxed{z = \tan\frac{x}{2}}$$

Sinon elle n'a pas de solution.

3. (a) L'équation (F_n) signifie exactement que $\frac{i-z}{i+z}$ est une racine n-ème de l'unité :

$$(F_n) : \qquad \left(\frac{i-z}{i+z}\right)^n = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{i-z}{i+z} \in \mathbb{U}_n$$

On connaît les racines n-èmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{n}} \;\middle|\; k = 0, \ldots, n-1 \right\}$$

Ceci montre que z est solution de (F_n) si et seulement s'il est solution de l'une des n équations (E_x) où x parcourt l'ensemble $\mathbb{U}_n$:

$$(F_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{i-z}{i+z} = e^{ik\frac{2\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad k = 0, \ldots, n-1$$

On a vu que l'équation (E_x) n'admet pas de solution si $x = \pi + 2k\pi$ ou $k \in \mathbb{Z}$.
Les réels $k\frac{2\pi}{n}$ pour $k = 0, \ldots, n-1$ sont toutes comprises entre 0 et 2π, donc le seul cas ne donnant pas de solution est le cas où $k\frac{2\pi}{n} = \pi$, ce qui équivaut à $k = \frac{n}{2}$. Ce cas est possible si et seulement si n est pair.
Le résultat de la question 2 donne :

$$(F_n) \quad \Longleftrightarrow \quad z = \tan\frac{k\pi}{n} \quad \text{avec} \quad k = 0, \ldots, n-1 \quad \text{et} \quad k \neq \frac{n}{2}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation (F_n) est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \tan \frac{k\pi}{n} \;\middle|\; k = 0, \ldots, n-1 \qquad k \neq \frac{n}{2} \right\}.}$$

Démontrons que ces solutions sont toutes distinctes, ce qui justifie qu'elles sont au nombre de n si n est impair et $n-1$ si n est pair.
Soit k et ℓ deux entiers différents de $\frac{n}{2}$, tels que $0 \leqslant k < n$, $0 \leqslant \ell < n$. Supposons que $\tan \frac{k\pi}{n} = \tan \frac{\ell\pi}{n}$.
Alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{k\pi}{n} = \frac{\ell\pi}{n} + m\pi$.
Ceci donne $k = \ell + mn$ puis $k - \ell = mn$.
Comme $0 \leqslant k < n$ et $0 \leqslant \ell < n$ alors $-n < k - \ell < n$, donc $-n < mn < n$ et enfin $-1 < m < 1$. Ainsi $m = 0$ car m est entier. Et donc $k = \ell$.
Par contraposée : si $k \neq \ell$ alors $\tan \frac{k\pi}{n} \neq \tan \frac{\ell\pi}{n}$, et donc les solutions $\tan \frac{k\pi}{n}$ pour $k = 0, \ldots, n-1$ sont toutes distinctes.

(b) D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(i - z)^5 &= i - 5z - 10iz^2 + 10z^3 + 5iz^4 - z^5 \\
(i + z)^5 &= i + 5z - 10iz^2 - 10z^3 + 5iz^4 + z^5
\end{aligned}$$

On obtient donc les équivalences suivantes pour l'équation (F_5) :

$$\begin{aligned}
(F_5) : \quad \left(\frac{i-z}{i+z}\right)^5 = 1 \quad &\iff \quad (i-z)^5 = (i+z)^5 \quad \iff \quad z^5 - 10z^3 + 5z = 0 \\
&\iff \quad z = 0 \quad \text{ou} \quad z^4 - 10z^2 + 5 = 0
\end{aligned}$$

L'équation $z^4 - 10z^2 + 5 = 0$ est une équation du second degré en $Z = z^2$, dont les solutions sont $Z = 5 \pm 2\sqrt{5}$. Elles sont positives.
Les quatre solutions de (F_5) sont donc :

$$z_1 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \qquad z_2 = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \qquad z_3 = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \qquad z_4 = -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

L'ensemble des solutions de (F_5) est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ 0, \pm\sqrt{5 \pm 2\sqrt{5}} \right\}}$$

On identifie ces solutions avec celles obtenues dans la question précédente :

$$\mathcal{S} = \left\{ \tan \frac{k\pi}{5} \;\middle|\; k = 0, \ldots, 4 \right\}.$$

On sait que la fonction tangente est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Comme

$$0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{5} < \frac{4\pi}{5} < \pi$$

alors :

$$\tan\frac{4\pi}{5} < \tan\frac{3\pi}{5} < 0 < \tan\frac{\pi}{5} < \tan\frac{2\pi}{5}$$

Or les quatre solutions ci-dessus vérifient :

$$z_4 < z_2 < 0 < z_3 < z_1$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\begin{array}{rclrcl} \tan\dfrac{\pi}{5} & = & \sqrt{5-2\sqrt{5}} & \tan\dfrac{2\pi}{5} & = & \sqrt{5+2\sqrt{5}} \\ \tan\dfrac{3\pi}{5} & = & -\sqrt{5-2\sqrt{5}} & \tan\dfrac{4\pi}{5} & = & -\sqrt{5+2\sqrt{5}} \end{array}}$$

4. (a) On rappelle que la fonction tangente hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -1 < \operatorname{th} x < 1.$$

Ainsi $1 - \operatorname{th}^2 x > 0$ donc les expressions à simplifier sont bien définies.
On rappelle que $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, et donc $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
Alors :

$$\frac{2\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th}^2 x} = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2 \times \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh}(2x)$$

$$\frac{1+\operatorname{th}^2 x}{1-\operatorname{th}^2 x} = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \operatorname{ch}(2x).$$

On peut en déduire :

$$\operatorname{th}(2x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(2x)} = \frac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}.$$

(b) Si z est imaginaire pur alors $z = iy$ avec y réel. L'équation (G_x) donne par équivalences :

$$(G_x) \iff \left|\frac{i-iy}{i+y}\right| = \operatorname{th} x \iff \left|\frac{1-y}{1+y}\right| = \operatorname{th} x \iff \left|\frac{1-y}{1+y}\right|^2 = \operatorname{th}^2 x$$

puis :

$$\begin{aligned} (G_x) &\iff (1-y)^2 = (1+y)^2 \operatorname{th}^2 x \\ &\iff 1 - 2y + y^2 = \operatorname{th}^2 x + 2\,y\operatorname{th}^2 x + y^2 \operatorname{th}^2 x \\ &\iff (1-\operatorname{th}^2 x)y^2 - 2(1+\operatorname{th}^2 x)y + (1-\operatorname{th}^2 x) = 0 \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{th}^2 x \neq 1$, et d'après la seconde formule obtenue dans la question (4a) :

$$(G_x) \iff y^2 - 2y\operatorname{ch}(2x) + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = 4\operatorname{ch}^2(2x) - 4 = 4\operatorname{sh}^2(2x).$$

Ses solutions sont :

$$y_1 = \operatorname{ch}(2x) + \operatorname{sh}(2x) = e^{2x} \qquad \text{et} \qquad y_2 = \operatorname{ch}(2x) - \operatorname{sh}(2x) = e^{-2x}.$$

Les solutions imaginaires pures de (G_x) sont donc :

$$\boxed{z = ie^{2x} \quad \text{et} \quad z = ie^{-2x}}$$

(c) On raisonne par équivalences :

$$(G_x) \iff \left|\frac{i-z}{i+z}\right| = \operatorname{th} x \iff \left|\frac{i-z}{i+z}\right|^2 = \operatorname{th}^2 x$$

De même que dans la question 1(a) :

$$\left|\frac{i-z}{i+z}\right|^2 = \frac{1 - i\bar{z} + iz + z\bar{z}}{1 + i\bar{z} - iz + z\bar{z}}$$

donc

$$\begin{aligned}
(G_x) &\iff 1 - i\bar{z} + iz + z\bar{z} = \operatorname{th}^2 x(1 + i\bar{z} - iz + z\bar{z}) \\
&\iff (1 - \operatorname{th}^2 x)z\bar{z} + (1 + \operatorname{th}^2 x)iz - (1 + \operatorname{th}^2 x)i\bar{z} + (1 - \operatorname{th}^2 x) = 0 \\
&\iff z\bar{z} + i\operatorname{ch}(2x)\, z - i\operatorname{ch}(2x)\,\bar{z} + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière équivalence étant valable car $\operatorname{th}^2 x \neq 1$.
D'autre part on constate que :

$$|z-a|^2 = (z-a)\,\overline{(z-a)} = (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a}$$

On pose $a = i\operatorname{ch}(2x)$. Alors $\bar{a} = -i\operatorname{ch}(2x)$ puis :

$$|z - i\operatorname{ch}(2x)|^2 = z\bar{z} + i\operatorname{ch}(2x)\,z - i\operatorname{ch}(2x)\,\bar{z} + \operatorname{ch}^2(2x)$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned}
(G_x) &\iff |z - i\operatorname{ch}(2x)|^2 - \operatorname{ch}^2(2x) + 1 = 0 \\
&\iff |z - i\operatorname{ch}(2x)|^2 = \operatorname{ch}^2(2x) - 1 = \operatorname{sh}^2(2x)
\end{aligned}$$

Comme x est positif alors $\operatorname{sh}(2x)$ est positif donc on aboutit à :

$$\boxed{(G_x) \iff |z - i\operatorname{ch}(2x)| = \operatorname{sh}(2x)}$$

(d) Soit C le point d'affixe $i\operatorname{ch}(2x)$. Alors pour tout point M d'affixe z :

$$|z - i\operatorname{ch}(2x)| = CM.$$

Ainsi z vérifie l'équation (G_x) si et seulement si la distance de C à M est égale à $\operatorname{sh}(2x)$, donc si et seulement si M est sur le cercle de centre C et de rayon $\operatorname{sh}(2x)$.

L'ensemble des solutions de (G_x) est le cercle de centre d'affixe $i\operatorname{ch}(2x)$ et de rayon $\operatorname{sh}(2x)$.