

Feuille de T. D. A5
Primitives

Exercices de cours

① Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = 6x^4 - 4x^3 - 3x + 5$$

$$f_2(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \quad f_3(x) = e^{1-x}$$

$$f_4(x) = \frac{4x^3 - x^2 - 3x}{x^2} \quad f_5(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$f_6(x) = \frac{1}{(2x-3)^5} \quad f_7(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$$

$$f_8(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x + 1} \quad f_9(x) = \frac{3x}{\sqrt{5x^2 + 1}}$$

② Calculer de deux façons différentes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 x \cos x \, dx$$

③ Calculer une primitive de $f : x \mapsto \operatorname{sh}^4 x$

④ Calculer : $I_2 = \int_0^{2\pi} e^{3t} \sin t \, dt$

⑤ Calculer : $I_3 = \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} \, dx$

⑥ Calculer la primitive qui s'annule en 0 de :

$$f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^2+5x+6}{x+1}$$

⑦ Déterminer une primitive de : $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

⑧ Calculer :

$$I_4 = \int_1^{\frac{5}{2}} \frac{3x-4}{2x^2+3x-2} \, dx \quad I_5 = \int_1^2 \frac{dx}{x^2-4x+7}$$

$$I_6 = \int_1^2 \frac{x \, dx}{x^2-4x+7} \quad I_7 = \int_0^3 \frac{4-5x}{x^2-8x+16} \, dx$$

⑨ Calculer :

$$I_8 = \int_0^\pi x \cos x \, dx \quad F(x) = \int_0^x \arctan t \, dt$$

⑩ Utiliser les changements de variable :

$$x = e^t \quad x = 3t - 2 \quad x = \frac{1}{t} \\ x = \cos t \quad t = \tan \frac{x}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} - 2t$$

Pour calculer les intégrales suivantes.

$$I_9 = \int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$$

$$I_{10} = \int_1^2 \frac{3t^2 - 2}{3t - 2} \, dt$$

$$I_{11} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} \, dt$$

$$I_{12} = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin 2t}{1 + \cos t} \, dt$$

$$I_{13} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} \, dx$$

Travaux dirigés

① Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = \frac{x}{x^2 + 3x - 10}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 1}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$$

$$f_4(x) = \frac{x}{4x^2 + 4x + 1}$$

$$f_5(x) = \frac{1}{8x^2 + 50}$$

$$f_6(x) = \frac{9}{x^2 - 9x}$$

$$f_7(x) = \frac{x}{x^2 - 8x + 20}$$

$$f_8(x) = \frac{1}{1 - 3x + \frac{9}{2}x^2}$$

② Calculer une primitive des fonctions :

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$$

sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$.

③ Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) \, dt$$

en utilisant un changement de variable affine échangeant ses bornes.

④ Soit N un entier naturel. Pour tout entier m tel que $0 \leq m \leq N$ on note :

$$I_m = \int_0^1 x^m (1-x)^{N-m} \, dx$$

a. Calculer I_0 .

b. Démontrer que pour tout $m \in \{0, \dots, N-1\}$:

$$I_{m+1} = \frac{m+1}{N-m} I_m$$

c. En déduire une formule générale pour I_m et la démontrer par récurrence.

Vérifier cette formule pour I_N .

d. Donner pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ la valeur de :

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx$$

5 Déterminer, pour chacune des intégrales suivantes, quelle méthode permet de la calculer : primitives usuelles, manipulation d'expressions polynomiales et décomposition en éléments simples, linéarisation d'expressions trigonométriques, intégration par parties, changement de variable (dire lequel), autre.

$$\begin{array}{llll}
 I_1 = \int_0^4 \frac{2t}{t+2} dt & I_2 = \int_{-1}^1 \frac{3t-4}{(t-2)^2} dt & I_3 = \int_0^2 \frac{2t-1}{(t+1)^2} dt & I_4 = \int_0^1 \frac{t^2+t+1}{2t+1} dt \\
 I_5 = \int_4^8 \frac{4dt}{t^2-4t+3} & I_6 = \int_a^{2a} \frac{dt}{t(t+a)} \text{ avec } a \neq 0 & & I_7 = \int_0^1 \frac{4t+1}{t^2+1} dt \\
 I_8 = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+4} dt & I_9 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{8t dt}{(3t^2-2)^4} & I_{10} = \int_{-1}^0 \frac{t dt}{t^4-4} & I_{11} = \int_1^2 \frac{dt}{t(t^3+2)} \\
 I_{12} = \int_0^1 \frac{t dt}{t^4-t^2-2} & I_{13} = \int_0^{\frac{1}{2}} t(2t-1)^8 dt & I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 t dt & I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan t)^2 dt \\
 I_{16} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt & I_{17} = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{\sin^4 t} dt & I_{18} = \int_0^x t^3 e^{-t^2/2} dt & I_{19} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2t} \cos 3t dt \\
 I_{20} = \int_{-\ln 3}^{\ln 3} e^{-t} \operatorname{ch} t dt & I_{21} = \int_{-2}^2 t \operatorname{sh} t dt & I_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t \cos 2t dt & I_{23} = \int_0^{\ln 2} \operatorname{ch} t \operatorname{sh} 2t dt \\
 I_{24} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) dt & I_{25} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos t dt & I_{26} = \int_0^A t^2 e^{-t} dt \\
 I_{27} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dt}{1+e^t} & I_{28} = \int_1^3 \frac{dt}{t\sqrt{t+1}} & I_{29} = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} & I_{30} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos t} \\
 I_{31} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t dt}{\cos^2 t} & I_{32} = \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{t dt}{\cos t} & I_{33} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 t}{1+4\sin^2 t} dt & I_{34} = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{e^t-2-3e^{-t}} \\
 I_{35} = \int_1^e \frac{\ln^n t dt}{t} & I_{36} = \int_0^2 \sqrt{t^2+1} dt & I_{37} = \int_1^6 \frac{\ln(t^2+4)}{t^2} dt & I_{38} = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin t}{1-t^2}} dt
 \end{array}$$

Calculer ensuite ces intégrales.

On pourra puiser dans la liste suivante de changements de variables utiles : $x = at + b$ avec (a, b) à déterminer, $x = t^2$, $x = t^3$, $x = \tan t$, $x = \sin t$, $x = e^t$, $x = e^t - 1$, $x = \sqrt{t+1}$, $t = \operatorname{sh} x$...

6 On note F et G les primitives s'annulant en 0 des fonctions :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1 + \cos x} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{1}{1 + \sin x}$$

a. Exprimer les fonctions F et G à l'aide d'intégrales, et préciser sur quels intervalles maximaux elles sont définies.

b. Calculer $F(x)$ en utilisant le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$.

Exprimer le résultat en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

c. Expliciter de même $G(x)$.

7 Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$\Phi(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$$

a. Justifier que la fonction Φ est bien définie sur \mathbb{R} .

b. Justifier que Φ est dérivable, et calculer sa dérivée.

c. Justifier que Φ est deux fois dérivable et donner sa dérivée seconde.

8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$$

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

En déduire que la suite (I_n) converge.

b. Calculer $I_n + I_{n+1}$.

c. Déterminer la limite de la suite :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

9 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

a. Justifier que la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ admet une primitive Φ sur \mathbb{R}_+^* .

En déduire que F est bien définie.

b. Démontrer que F est dérivable et calculer sa dérivée. Que peut-on en déduire ?

c. Appliquer le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ à $F(x)$ et retrouver le résultat précédent.