Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Feuille de T. D. A4
Fonctions usuelles

Exercices de cours

(1) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \qquad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x$$

Donner une formule pour $\operatorname{th} 2x$.

(2) Calculer $\quad \arcsin \sin 2\pi \quad \arccos \cos -\frac{11\pi}{6}$

$\quad \arccos \sin \frac{2\pi}{3} \quad \arcsin \cos \frac{47\pi}{3}$

(3) Démontrer que :

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[\quad \tan \arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin \arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(4) Les relations suivantes sont-elles valables pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

$\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor \quad \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \quad \lfloor xy \rfloor = \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor$

(5) Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Travaux dirigés

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $\operatorname{sh} x = \sqrt{3}$ b. $\operatorname{ch} x = \sqrt{3}$
c. $\operatorname{th} x = \frac{2}{3}$ d. $12 \operatorname{ch} x = 25 \operatorname{th} x$
e. $\operatorname{ch} x = \frac{5}{3}$ f. $19 \operatorname{sh} x - 16 \operatorname{ch} x = 4$
g. $3 \operatorname{ch} 2x - 4 \operatorname{ch} x = 7$ h. $16 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 15$
i. $\operatorname{sh} 2x = \operatorname{ch} x$ j. $\operatorname{sh} x + \frac{2}{\operatorname{sh} x} = 3$
k. $6 \operatorname{ch} x - 7 \operatorname{sh} x = a \quad (a \in \mathbb{R})$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = b \end{cases}$$

pour les couples (a, b) valant $(3, 4)$, $(2, 1)$, et $(3, 1)$.

3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ calculer :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kx) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{sh}(kx)$$

4 Dériver les fonctions suivantes.

a. $f(x) = \operatorname{sh} x + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 x$ b. $f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x$
c. $f(x) = \operatorname{th} x - \frac{1}{3} \operatorname{th}^3 x$ d. $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{\operatorname{sh} x + \sin x}$
e. $f(x) = \operatorname{ch} x \cos x + \operatorname{sh} x \sin x$

5 Calculer les réels suivants.

$a = \cos\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)$ $\quad b = \sin\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$
$c = \sin\left(2 \arcsin \frac{1}{7}\right)$ $\quad d = \tan\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$
$e = \cos\left(\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$ $\quad f = \sin\left(\arctan \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$
$g = \tan\left(2 \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $\quad h = \sin(2 \arctan 3)$
$i = \tan\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

6 Étudier les fonctions suivantes.

a. $f(x) = 5 \operatorname{ch} x - 4 \operatorname{sh} x$ b. $f(x) = \arccos(2x^2 - 1)$
c. $f(x) = \arctan \operatorname{sh} x$ d. $f(x) = \sin(2 \arctan e^x)$
e. $f(x) = \arcsin \operatorname{th} x + \arccos \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$
f. $f(x) = \arcsin \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ g. $f(x) = \arctan \dfrac{x-1}{x+1}$

7 Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

a. $\arcsin x = \arcsin \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$
b. $\arccos \frac{x+1}{2} = \arcsin x$
c. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin x$
d. $\arcsin x = 2 \arccos x$
e. $\arccos(x^2) + \arccos(1 - x^2) = \frac{\pi}{2}$
f. $\arcsin x = \arctan 2x$
g. $\arctan x + \arctan 3x = \frac{\pi}{2}$

8 Calculer :

$a = \arctan 2 + \arctan 3$ et $b = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$

$c = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$

$d = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$

9 Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\arcsin x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Peut-on exprimer de façon aussi simple $\arccos x$ en fonction d'un arc-tangente ?

10 Pour tout $x \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$A(x) = \arctan \frac{x}{x+1} - \arctan \frac{x-1}{x}$$
$$\text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{2k^2}$$

a. Démontrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $A(x)$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
b. Simplifier $A(x)$ en calculant sa tangente.
c. Calculer S_n.

$\boxed{\textbf{11}}$ On définit les fonctions :

$$f_1 = \arcsin \circ \sin$$
$$f_2 = \arccos \circ \cos$$
$$f_3 = \arctan \circ \tan$$

a. Déterminer l'ensemble de définition et une période de f_3, puis tracer sa courbe.

b. Déterminer l'ensemble de définition, une période et la parité de f_2, puis tracer sa courbe.

c. Déterminer l'ensemble de définition et une période de f_1, calculer $f_1(\pi - x)$, puis tracer sa courbe.

d. Démontrer que pour tout x dans l'ensemble de définition de f_3 :

$$f_3(x) = x - \pi \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$\boxed{\textbf{12}}$ On note :

$$f(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)\right)\right)$$

a. Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Simplifier l'expression de $f(x)$.

Indication : calculer $\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$.

$\boxed{\textbf{13}}$ Pour tout réel x on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à x, appelé *plafond* de x.

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$

$\boxed{\textbf{14}}$ Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$:

$$m\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor mx \rfloor \leqslant m\lfloor x \rfloor + m - 1$$

En déduire que :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$