Corrigé du Devoir à la Maison n°2

Partie A. Un terme sur trois

1. On calcule de proche en proche les premières lignes du triangle de Pascal.
On ajoute les colonnes pour A_n, B_n, C_n.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	A_n	B_n	C_n
0	**1**								**1**	0	0
1	**1**	1							**1**	1	0
2	**1**	2	1						**1**	2	1
3	**1**	3	3	**1**					**2**	3	3
4	**1**	4	6	**4**	1				**5**	5	6
5	**1**	5	10	**10**	5	1			**11**	10	11
6	**1**	6	15	**20**	15	6	**1**		**22**	21	21
7	**1**	7	21	**35**	35	21	**7**	1	**43**	43	42

2. On souhaite calculer :

$$S_n = A_n + B_n + C_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 0[3]}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 1[3]}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 2[3]}}^{n} \binom{n}{k}$$

Tout nombre entier est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3, donc :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 0[3]}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 1[3]}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 2[3]}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

D'après la formule du binôme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

3. On sait que $j^3 = 1$.
Si k est un entier naturel congru à 0 modulo 3 alors il existe un entier m tel que $k = 3m$, donc $j^k = j^{3m} = (j^3)^m = 1$.
Si k est congru à 1 alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3m+1$, donc $j^k = j^{3m}j = j$.
Si k est congru à 2 alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3m+2$, donc $j^k = j^{3m}j^2 = j^2$
On peut donc écrire la somme T_n de la façon suivante :

$$\begin{aligned} T_n &= A_n + jB_n + j^2C_n \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 0[3]}}^{n} \binom{n}{k} j^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 1[3]}}^{n} \binom{n}{k} j^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 2[3]}}^{n} \binom{n}{k} j^k \end{aligned}$$

Ceci donne :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k$$

Grâce à la formule du binôme :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k 1^{n-k} = (1+j)^n$$

On calcule :

$$1 + j = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

On en conclut :

$$\boxed{T_n = e^{i\frac{n\pi}{3}}}$$

4. Premièrement la formule calculée juste ci-dessus s'écrit $T_n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$, donc :

$$\mathrm{Re}(T_n) = \cos\frac{n\pi}{3} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(T_n) = \sin\frac{n\pi}{3}$$

Ensuite les coefficients du binômes sont des entiers, donc *a fortiori* des réels. Comme :

$$T_n = A_n + jB_n + j^2 C_n$$

alors :

$$\mathrm{Re}(T_n) = A_n + \mathrm{Re}(j)B_n + \mathrm{Re}(j^2)C_n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(T_n) = \mathrm{Im}(j)B_n + \mathrm{Im}(j^2)C_n$$

On sait que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc :

$$\mathrm{Re}(T_n) = A_n - \frac{1}{2}(B_n + C_n) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(T_n) = \frac{\sqrt{3}}{2}(B_n - C_n)$$

5. D'après les questions 2 et 4 :

$$\begin{cases} A_n + \quad B_n + C_n \ = 2^n \\ A_n - \frac{1}{2}(B_n + C_n) = \cos\frac{n\pi}{3} \\ \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}(B_n - C_n) = \sin\frac{n\pi}{3} \end{cases}$$

L'opération $(L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2)$ donne $3A_n = 2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}$, et donc :

$$\boxed{A_n = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)}$$

On en déduit les valeurs de $B_n + C_n$ et $B_n - C_n$ grâce aux lignes 1 et 3 :

$$\begin{cases} B_n + C_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} - 2\cos\frac{n\pi}{3}\right) \\ B_n - C_n = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3} \end{cases}$$

On aboutit aux formules :

$$\boxed{B_n = \frac{1}{3}\left(2^n - \cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}\right) \qquad C_n = \frac{1}{3}\left(2^n - \cos\frac{n\pi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}\right)}$$

On vérifie ces formules pour n allant de 0 à 7 dans le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
A_n	1	1	1	2	5	11	22	43
B_n	0	1	2	3	5	10	21	43
C_n	0	0	1	3	6	11	21	42
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128
$\cos\frac{n\pi}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
$2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}$	3	3	3	6	15	33	66	129
$2^n - \cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}$	0	3	6	9	15	30	63	129
$2^n - \cos\frac{n\pi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}$	0	0	3	9	18	33	63	126

On constate effectivement que les trois dernières lignes donnent le triple des lignes A_n, B_n et C_n.

Partie B. Un terme sur six

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. D'après la formule du binôme :

$$A_{n,\,m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\omega^m)^k 1^{n-k} = (1+\omega^m)^n$$

Comme $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors :

$$1 + \omega^m = 1 + e^{i\frac{m\pi}{3}} = e^{i\frac{m\pi}{6}}\left(e^{-i\frac{m\pi}{6}} + e^{i\frac{m\pi}{6}}\right) = e^{i\frac{m\pi}{6}}\, 2\cos\frac{m\pi}{6}$$

On en déduit :

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad A_{n,\,m} = 2^n \cos^n\left(\frac{m\pi}{6}\right) e^{i\frac{mn\pi}{6}}$$

En particulier :

$$\boxed{A_{n,\,0} = 2^n \qquad A_{n,\,3} = 0}$$

(b) On constate : $\quad \omega^5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \overline{\omega} \quad$ et $\quad \omega^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \overline{\omega^2}$

On en déduit :

$$A_{n,5} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^{5k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overline{\omega}^k = \overline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^k} = \overline{A_{n,1}}$$

$$\text{et} \qquad A_{n,4} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^{4k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overline{\omega^2}^k = \overline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^{2k}} = \overline{A_{n,2}}$$

Ceci permet de calculer :

$$A_{n,1} + A_{n,5} = 2\,\mathrm{Re}\,(A_{n,1})$$

D'après la question précédente :

$$A_{n,1} + A_{n,5} = 2\,\mathrm{Re}\left(2^n \cos^n\left(\frac{m\pi}{6}\right) e^{i\frac{mn\pi}{6}}\right) = 2^{n+1} \cos^n\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

$$A_{n,2} + A_{n,4} = 2\,\mathrm{Re}\left(2^n \cos^n\left(\frac{m\pi}{3}\right) e^{i\frac{mn\pi}{3}}\right) = 2^{n+1} \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{A_{n,1} + A_{n,5} = 2\left(\sqrt{3}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \qquad A_{n,2} + A_{n,4} = 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}$$

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On remarque que pour tout $m \in \mathbb{N}$: $\quad \omega^{km} = (\omega^k)^m$

La suite $(\omega^{km})_{m\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\omega^k = e^{i\frac{k\pi}{3}}$.

- Si k est multiple de 6 alors cette raison est égale à 1 et donc :

$$B_k = \sum_{m=0}^{5} \omega^{km} = \sum_{m=0}^{5} 1 = 6$$

- Si k n'est pas multiple de 6 alors la raison ω^k n'est pas égale à 1 et donc en utilisant la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique on obtient :

$$B_k = \sum_{m=0}^{5} \omega^{km} = \frac{1 - (\omega^k)^6}{1 - \omega^k} = 0$$

  En effet $(\omega^k)^6 = (\omega^6)^k = 1$.

Finalement on a démontré que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad B_k = \begin{cases} 6 & \text{si } k \text{ est multiple de } 6 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(b) Par définition de $A_{n,m}$:

$$\sum_{m=0}^{5} A_{n,m} = \sum_{m=0}^{5}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\omega^{km}$$

Il s'agit d'une somme rectangulaire. On peut écrire :

$$\sum_{m=0}^{5} A_{n,m} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{5}\binom{n}{k}\omega^{km} = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\sum_{m=0}^{5}\omega^{km}\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

D'après la question précédente, B_k est nulle si k n'est pas multiple de 6, et égale à 6 sinon, donc :

$$\sum_{m=0}^{5} A_{n,m} = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ multiple de } 6}} 6\binom{n}{k}$$

Or S_n est précisément la somme des $\binom{n}{k}$ pour k multiple de 6, donc par linéarité on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{m=0}^{5} A_{n,m} = 6S_n}$$

3. (a) La formule que nous venons de démontrer donne :

$$S_n = \frac{1}{6}(A_{n,0} + A_{n,1} + A_{n,2} + A_{n,3} + A_{n,4} + A_{n,5})$$

Grâce à la question 1 on en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \frac{1}{3}\left(2^{n-1} + \left(\sqrt{3}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)}$$

(b) Si $n = 10$ alors :

$$S_{10} = \binom{10}{0} + \binom{10}{6}$$

Par définition des coefficients binomiaux :

$$S_{10} = 1 + \frac{10!}{6!\,4!} = 1 + \frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2} = 1 + 10\times 3\times 7 = 211$$

La formule donne quant à elle :

$$S_{10} = \frac{1}{3}\left(2^9 + 3^5\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(512 + \frac{243}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{633}{3} = 211$$

On retrouve bien la bonne valeur.