

B. Opérations sur les parties d'un ensemble

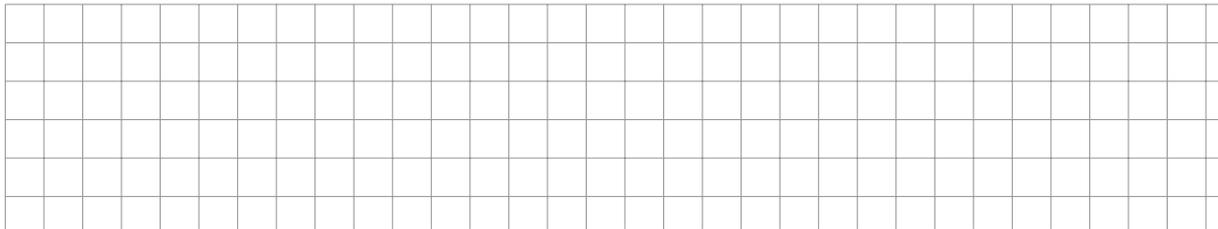
Définitions. Soit A et B deux parties d'un ensemble E . On définit :

$\bar{A} = E \setminus A = \complement_E^A = \{x \in E \mid x \notin A\}$ le complémentaire de A (dans E)

$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ l'intersection de A et B

$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ l'union ou la réunion de A et B

$A \setminus B = A - B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$ la différence de A et B .



Proposition - Règles de calcul élémentaires sur les parties d'une ensemble.

On note A, B, C trois parties d'un ensemble E .



II. Applications

A. Généralités

Définition. Soit E et F deux ensembles non-vides. Une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F .

Notation. On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F .

Définitions. Soit f une application de E dans F .

(i) Si A est une partie de E alors on appelle image de A par f et on note $f(A)$ l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Il s'agit d'un sous-ensemble de F : $f(A) \subseteq F$.

(ii) Si B est une partie de F alors on appelle image réciproque de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Il s'agit d'une partie de E : $f^{-1}(B) \subseteq E$.

Remarque. Ainsi la donnée de $f : E \rightarrow F$ permet de définir deux nouvelles fonctions :

$$f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F) \quad \text{et} \quad f^{-1} : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E).$$

La première ne doit pas être confondue avec la fonction f de départ, même si par abus elle est notée de la même façon.

La seconde est définie même si f n'est pas bijective, et dans le cas où f est bijective il ne faut pas la confondre avec la réciproque de f .

Exemple 2. Pour la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sin x$$

$f([0, \pi]) =$	$f^{-1}([0, 1]) =$
$f(\mathbb{R}) =$	$f^{-1}(\{2\}) =$

Remarque. Soit $x \in E$ et $y \in F$. Alors :

$y \in f(A)$	\iff
$x \in f^{-1}(B)$	\iff

▷ **Exercice 5.**

Théorème. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. Alors f est bijective si et seulement si il existe une fonction $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.

Dans ce cas g est la réciproque de f : $g = f^{-1}$.

Démonstration.

Remarques.

(i) Ce théorème implique que si f est bijective alors il existe une *unique* application g telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.

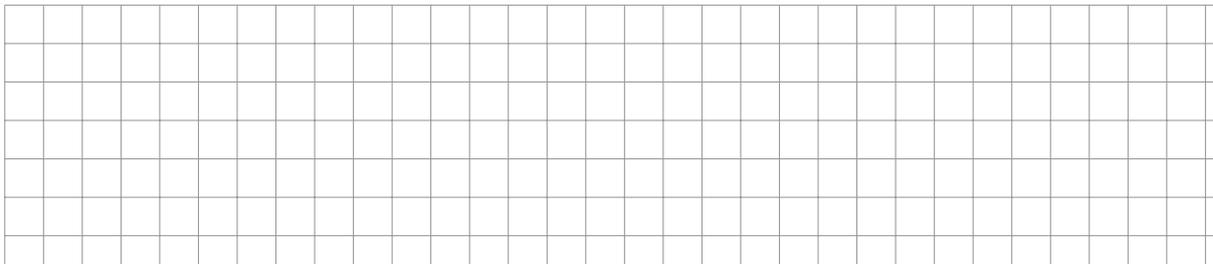
(ii) Si f est bijective alors f^{-1} est bijective, et $(f^{-1})^{-1} = f$.

C. Cas des fonctions réelles

Dans cette partie on suppose que E et F sont des parties de \mathbb{R} .

Remarque. Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection.

Alors les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice des axes.



Exemple 6. Fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^2$

Remarque. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. Alors :

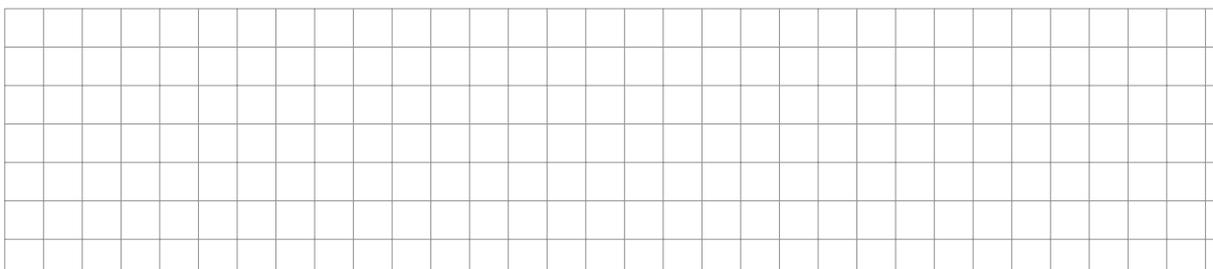
- Un réel y admet au moins un antécédent si et seulement si il appartient à $f(E)$, l'image de E par f .

On peut définir la fonction $\hat{f} : E \rightarrow f(E)$, que l'on note souvent f par abus.
 $x \mapsto f(x)$

Celle-ci est surjective.

- Si f est strictement monotone alors f est injective.

Démonstration du second point. Si f est strictement monotone alors :



Ainsi f est injective. □

Théorème de la bijection. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est continue et strictement monotone alors :

- $f(I)$ est un intervalle.
- f réalise une bijection de I dans $f(I)$.

De plus, en notant $J = f(I)$, la fonction réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est bijective, continue, strictement monotone de même sens que f .

Exemple. La fonction \ln réalise une bijection croissante de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} .

Sa réciproque est la fonction \exp , elle réalise une bijection croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* .

(iv) Soit E l'ensemble des stylos et crayons d'une trousse. Alors la relation «écrit de la même couleur que» est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont

(v) Soit \mathcal{E} la classe de tous les ensembles finis. Alors la relation «avoir le même nombre d'éléments que» est une relation d'équivalence sur \mathcal{E} .

Les classes d'équivalence sont

Proposition. *L'ensemble des classes d'équivalence de E forme une partition de E .*

Définition. Soit E un ensemble, et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

On dit que cette famille est une partition de E si :

(i) Les A_i sont disjoints : $\forall (i, j) \in I^2 \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$

(ii) Les A_i couvrent E tout entier : $\bigcup_{i \in I} A_i = E$



Remarque. Dans ce cas tout élément a de A appartient à un unique A_i :

$$\forall a \in E \quad \exists! i \in I \quad a \in A_i$$

▷ **Exercice 8.**

C. Relation d'ordre

Définition. Une relation d'ordre sur un ensemble est une relation binaire

• <u>réflexive</u> :	
• <u>antisymétrique</u> :	
• <u>transitive</u> :	

