Corrigé du Devoir à la Maison n°1

Exercice 1.

1. L'équation s'écrit :

$$X(16X^4 - 20X^2 + 5) = 0.$$

Elle équivaut à :

$$X = 0 \qquad \text{ou} \qquad 16X^4 - 20X^2 + 5 = 0.$$

En posant $Y = X^2$ la seconde équation devient :

$$16Y^2 - 20Y + 5 = 0.$$

Ses solutions sont :

$$Y_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \qquad \text{et} \qquad Y_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}.$$

Les solutions de l'équation proposées sont donc :

$$X_1 = 0 \quad X_2 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \quad X_3 = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \quad X_4 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \quad X_5 = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

L'ensemble des solutions peut donc être noté :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{0, \pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}}\right\}.$$

2. Par propriété :

$$\begin{aligned} \cos(5t) = 0 \quad &\iff \quad 5t = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \quad t = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette seconde équation peut donc être noté :

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. On connaît les formules de duplication :

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 \qquad \sin(2t) = 2\sin t \cos t.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} &\cos(4t) = 2\cos^2(2t) - 1 = 2\Big(2\cos^2 t - 1\Big)^2 - 1 = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1 \\ &\sin(4t) = 2\sin(2t)\cos(2t) = 4\sin t \cos t(2\cos^2 t - 1). \end{aligned}$$

Enfin par formule d'addition :

$$\begin{aligned}\cos(5t) &= \cos(4t+t)\\ &= \cos(4t)\cos t - \sin(4t)\sin t\\ &= 8\cos^5 t - 8\cos^3 t + \cos t - 4\sin^2 t\cos t(2\cos^2 t - 1).\end{aligned}$$

Comme $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ alors :

$$\cos(5t) = 16\cos^5 t - 20\cos^2 t + 5\cos t.$$

4. Soit t un élément de l'ensemble $\mathcal{S}_2$, c'est-à-dire un réel vérifiant $\cos(5t) = 0$.
   D'après la question précédente on a alors $16\cos^5 t - 20\cos^2 t + 5\cos t = 0$.
   Soit $X = \cos t$. Alors X est solution de l'équation de la question 1, donc $\cos t$ prend l'une des valeurs X_1 à X_5.
   Comme $t_1 = \frac{\pi}{5}$ et $t_2 = \frac{3\pi}{10}$ appartiennent à l'ensemble $\mathcal{S}_2$ alors $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{3\pi}{5}$ appartiennent à l'ensemble $\mathcal{S}_1$.
   Les valeurs $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{3\pi}{10}$ appartiennent à l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. La fonction cosinus est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, et comme $\frac{\pi}{10} < \frac{3\pi}{10} < \frac{\pi}{2}$ alors :

   $$0 = \cos\frac{\pi}{2} < \cos\frac{3\pi}{10} < \cos\frac{\pi}{10}.$$

   Les solutions X_1 à X_5 de l'ensemble $\mathcal{S}_1$ vérifient $X_3 < X_5 < 0 < X_4 < X_2$ donc on peut en conclure :

   $$\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \qquad \text{et} \qquad \cos\frac{3\pi}{10} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

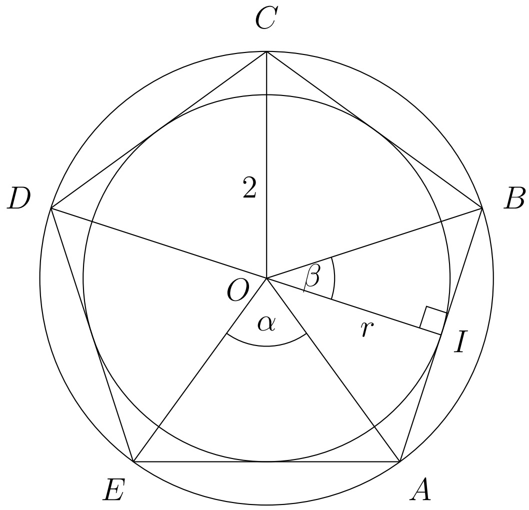
5. On remarque que $\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}$ et $\frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$. La formule $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ donne donc :

   $$\sin\frac{\pi}{5} = \cos\frac{3\pi}{10} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

   Par formule de duplication :

   $$\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{10} - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \qquad \text{et} \qquad \cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

6. Nommons O le centre des cercles, A, B, C, D, E les points du pentagone ci-dessous, I le milieu du segment $[AB]$. Soit β une mesure de l'angle $\widehat{IOB}$.



Ce pentagone est inscrit dans un cercle et ses côtés sont égaux, il est donc régulier. Ainsi l'angle α mesure $\frac{2\pi}{5}$.
Comme le triangle OAB est isocèle alors l'angle β mesure $\frac{\pi}{5}$, puis $\frac{OI}{OB} = \cos\beta$, ce qui donne :

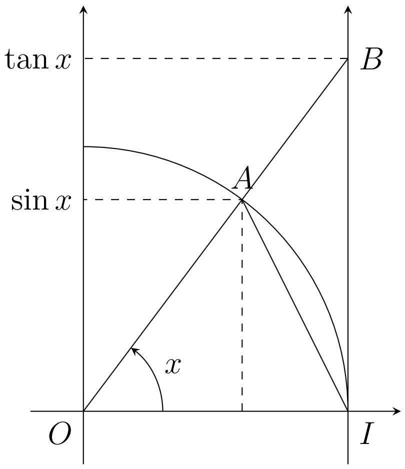
$$r = 2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

On peut reconnaître le nombre d'or.

Exercice 2.

1. L'aire d'une portion de disque de rayon r et d'angle α (en radians) est $\frac{1}{2}\alpha r^2$.
   En effet cette aire est proportionnelle à l'angle α, et pour $\alpha = 2\pi$ elle vaut πr^2.
   En conséquence l'aire de la portion de disque OAI est égale à $\frac{x}{2}\cdot$

   Le triangle OIA admet pour base le segment $[OI]$ de longueur 1 et sa hauteur est $\sin x$, donc son aire est égale à $\frac{1}{2}\sin x$.
   Le triangle OIB admet pour base le segment $[OI]$ également et sa hauteur est $\tan x$, donc son aire est égale à $\frac{1}{2}\tan x$.



2. La surface délimitée par le triangle OAI est incluse dans la portion de disque OAI, laquelle est incluse dans la surface délimitée par le triangle OIB. Les aires de ces surfaces sont donc de plus en plus grandes, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\sin x \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{2}\tan x$$

   En multipliant par 2 :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$$

3. L'inégalité de la question précédente étant vraie pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, elle est *a fortiori* vraie pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

   Si x appartient à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors x est positif et non-nul, donc en divisant l'inégalité de la question précédente par x on obtient :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \leqslant \frac{\tan x}{x}$$

   La première de ces inégalités donne :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$

La seconde, après multiplication par $\cos x$, qui est bien positif si x appartient à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donne :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \cos x \leqslant \frac{\sin x}{x}$$

On obtient bien l'encadrement souhaité :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \tag{1}$$

4. Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ alors $-x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on peut donc appliquer la formule de la question précédente :

$$\cos(-x) \leqslant \frac{\sin(-x)}{-x} \leqslant 1$$

Comme $\cos(-x) = \cos x$ et $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ alors on obtient bien :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\qquad \cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$

5. On sait que :

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

De plus l'inégalité (1) est valable pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc le théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes) montre que :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

On écrit ensuite :

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

Ceci donne :

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$$

Par produit de limites :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0}$$

6. Les formules d'addition permettent de calculer :

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} \quad = \sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}$$
$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} \quad = \cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}$$

On vient de démontrer que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$$

donc on obtient :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\sin x$$

On a ainsi démontré que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en tout réel x, et que leurs dérivées sont :

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \sin' x=\cos x \qquad \text{et} \qquad \cos' x=-\sin x.$$