Feuille de T. D. A3
Fonctions d'une variable réelle

Exercices de cours

1 On pose : $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Démontrer que f est impaire.

2 Donner les périodes des fonctions suivantes.

$$f(x) = \tan\frac{x}{2} \qquad g(x) = \frac{\cos 4x}{\sin 6x}$$
$$h(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

avec $(A, \omega, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ et A, ω non-nuls.

3 Démontrer que la fonction
$$f : x \mapsto \cos x + \cos(\pi x)$$
n'est pas périodique.

4 Tracer les droites d'équations :
$$y = 3 - 2x \qquad y = \frac{x}{2} + 3 \qquad 2x - 5y = 1$$

5 Déterminer une équation de la droite passant par les points de coordonnées $(4, 5)$ et $(-1, 2)$, puis $(-1, 0)$ et $(6, -1)$.

6 Démontrer que la fonction inverse
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$
est dérivable sur son ensemble de définition et donner sa fonction dérivée.

7 Démontrer que la fonction racine carrée
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$
est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas en 0.

8 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 15 \qquad f_2(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x}$$
$$f_3(x) = xe^x \qquad f_4(x) = \cos x \sin x$$
$$f_5(x) = \frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} \qquad f_6(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

9 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2) \qquad f_8(x) = \cos^2(3x)$$
$$f_9(x) = \ln((x+6)^2) \qquad f_{10}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$
$$f_{11}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad f_{12} = \frac{1}{(x^2 + 3x - 5)^2}$$

10 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :
$$f : x \mapsto \sqrt{x - x^2}$$
Sur quel ensemble est-elle dérivable ? Quelle est sa dérivée ?

11 Soit $f(x) = \ln(x)$. Calculer f', f'', f'''.

Trouver une formule pour $f^{(n)}$ $(n > 0)$ et la démontrer.

12 Justifier que la courbe de la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est une sinusoïde. Donner sa période et son amplitude.

Tracer son graphe ainsi que celui de la fonction cosinus sur un même graphique.

13 On pose $g(x) = 1 + \tan^2 x$.

Déterminer l'ensemble de définition de g, puis démontrer qu'on peut restreindre son étude à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Déterminer ses variations et ses limites, tracer sa courbe sur le graphique de l'exercice précédent.

14 Dériver et tracer la courbe de la fonction $f : x \mapsto \ln|x|$.

15 Résoudre les équations suivantes.

a. $2\ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(2x-1)$

b. $|\ln x| = \left|\ln\left(x + \frac{8}{3}\right)\right|$

16 Résoudre les équations suivantes.

a. $4\left(\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[6]{x}\right) = 15\sqrt{x}$

b. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

17 Démontrer que $\sin x \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, puis que $x \leqslant \tan x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

18 Étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x^3 - x^4}$.

Travaux dirigés

1 Soit a et b deux réels positifs, et :
$$m = \frac{a+b}{2} \qquad g = \sqrt{ab} \qquad h = \frac{2ab}{a+b}.$$

a. Ordonner m, g, h.

b. On suppose $a \leqslant b$. Ordonner m, g, h, a, b.

$\boxed{2}$ Ordonner les réels suivants :

a. $\frac{4}{5}$ $\quad 4-\sqrt{10}$

b. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{11}-\sqrt{9}$

c. $\frac{3}{2}$ $\quad \sqrt{2}$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad \sqrt{30}-4$

d. $\sqrt{11}$ $\quad \frac{23}{7}$ $\quad 5-\sqrt{3}$

e. $\sqrt{17}$ $\quad 2+\sqrt{7}$ $\quad 9-2\sqrt{5}$.

$\boxed{3}$ Soit x et y deux réels positifs. Démontrer successivement que :

a. $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}$

b. Si $x \geqslant y$ alors : $\sqrt{x}-\sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}$

c. Dans le cas général : $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

$\boxed{4}$ Tracer sans étudier de fonction les courbes d'équations suivantes :

a. $y = 1+\sin x$ $\qquad$ b. $y=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

c. $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ $\qquad$ d. $y = 2\sqrt{x+6}-1$

e. $y = x\sin x$ $\qquad$ f. $y=e^{-x}\cos x$

g. $y = 3+2|x|-x^2$ $\qquad$ h. $y=2-|x^2-1|$

i. $y=|e^x-1|$ $\qquad$ j. $y=-\ln|x|$

$\boxed{5}$ On pose $a=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

a. Démontrer que $a^3 = 14-3a$.

b. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x)=x^3+3x-14$ et en déduire la valeur de a.

$\boxed{6}$ Sur un échiquier (de 64 cases) on place un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, 4 sur la troisième, et ainsi de suite.

Combien de grains de riz obtient-on sur l'échiquier ? Combien de chiffres l'écriture décimale de ce nombre contient-elle, sachant que $\log 2 \simeq 0{,}301$?

$\boxed{7}$ À l'aide d'une calculatrice, donner l'écriture scientifique des réels :

$$a = 7777^{7777} \qquad b = e^{-100\,000} \qquad c = 1000!$$

Pour la dernière on écrira un programme `Python`.

$\boxed{8}$ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

a. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}$

b. $2^{x^3} = 3^{x^2}$

c. $2^{1-x}+3^{2x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3^{2x+1}$

d. $\ln(2x+1)-2\ln x = \ln(2x-1)-2\ln(x-1)$

e. $e^{2\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}+1}-2e^2=0$

f. $\ln(x-1)+\ln(x+1) < 2\ln x - 1$

g. $e^{2x}+(a+1)e^x+2(a-1)\leqslant 0$ avec $a\in\mathbb{R}$.

$\boxed{9}$ a. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$e^x \geqslant x+1$$

b. Étudier la position relative de la courbe de l'exponentielle et de celle de la parabole d'équation $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$. Tracer ces courbes et leurs tangentes en 0.

c. En déduire que pour tout $x>0$:

$$x-1 \leqslant xe^{-\frac{1}{x}} \leqslant x-1+\frac{1}{2x}$$

$\boxed{10}$ On note $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

a. Donner l'ensemble de définition de la fonction f, ses variations et ses limites.

b. Justifier que l'on peut prolonger f par continuité en 0.

c. Ce prolongement par continuité est-il dérivable ?

d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

$\boxed{11}$ Étudier les fonctions suivantes.

a. $f(x)=\ln\left(2x-x^2\right)$ $\qquad$ b. $f(x)=\dfrac{1}{3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-3x+2}$

c. $f(x)=\dfrac{2\ln x+3}{x}$ $\qquad$ d. $f(x)=x(x^2-1)^2$

e. $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ $\qquad$ f. $f(x)=(1+\cos x)\sin x$

g. $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x+2}}{x+3}$ $\qquad$ h. $f(x)=\cos^2 x-3\cos x+2$

i. $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ $\qquad$ j. $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

k. $f(x)=x\ln x$ $\qquad$ l. $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

$\boxed{12}$ On note :

$$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x+3} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{x+3}{x+1}-\ln(x+1)$$

a. Étudier la fonction g. Démontrer qu'elle s'annule en un unique point α et donner un encadrement de α d'amplitude 1.

b. Montrer que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$.

c. Étudier la fonction f.

On donne $\ln 2\simeq 0{,}7$ et $\ln 5 \simeq 1{,}6$.

$\boxed{13}$ Déterminer le signe des fonctions suivantes sur leurs ensembles de définition.

a. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(x-\dfrac{2}{x}-1\right)$ $\qquad$ b. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}-1$

c. $f(x)=x^2-\ln^2 x-1$

$\boxed{14}$ Démontrer les inégalités suivantes.

a. $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \qquad \ln x\leqslant\sqrt{x}$

b. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\} \qquad 0<\dfrac{x\ln x}{x^2-1}<\dfrac{1}{2}$

c. $\forall x\in\mathbb{R}_+ \qquad (x+1)^{x+1}\geqslant (x+2)^x$.