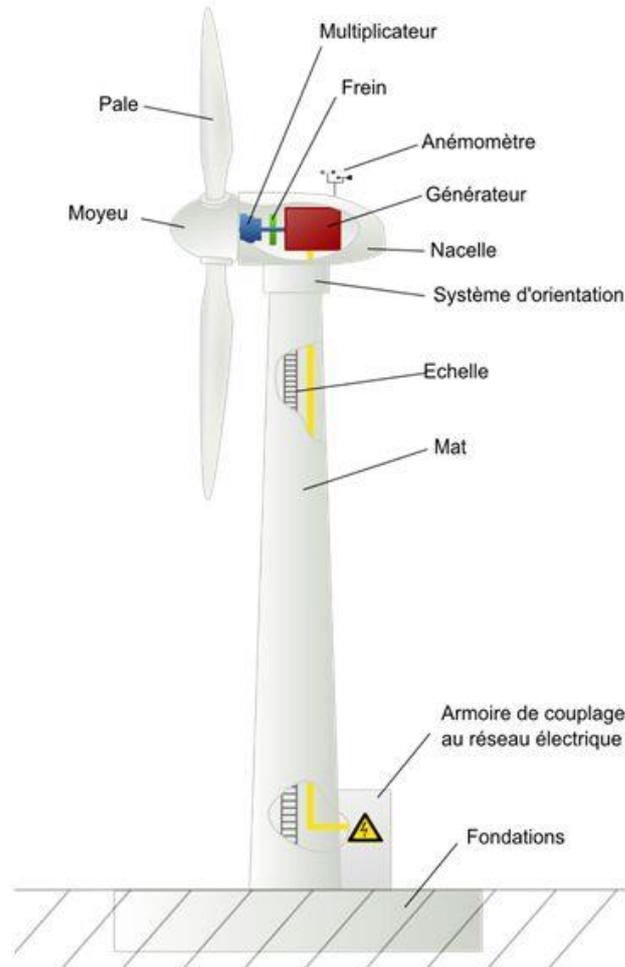


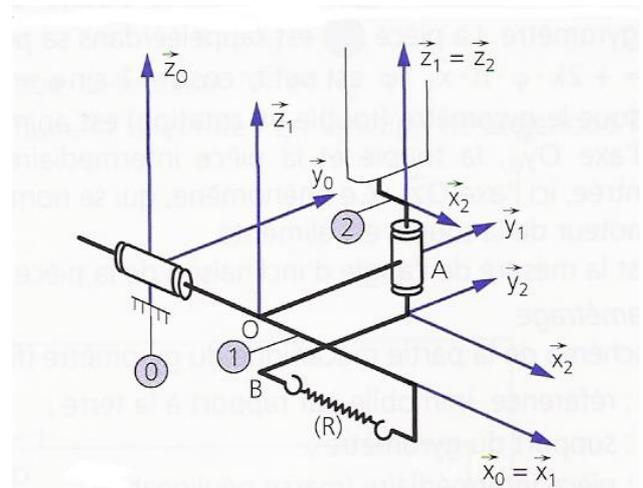
Exo 1

Etude des performances d'un aérogénérateur



Le mécanisme de l'aérogénérateur schématisé sur la figure ci-contre est constitué de :

- un rotor 1 appelé aussi hélice qui tourne autour d'un axe horizontal par rapport à la nacelle 0 ;
- deux ensembles « pale », chacun pouvant s'orienter par rapport au rotor ; seul un des ensembles est représenté, numéroté 2 ; la pale symétrique est notée 2' ;
- un ensemble de ressorts pour chaque pale destiné à assurer la régulation.



Paramétrage :

$R_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère lié à la nacelle 0 considéré comme fixe.

$R_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ repère lié au rotor 1 tel que $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$.

$R_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ repère lié à la pale 2 tel que $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \alpha$ (angle de calage de la pale).

Le point A est défini par $\vec{OA} = a\vec{y}_1$.

Le centre d'inertie de la pale est appelé G ; sa position est définie par $\vec{AG} = x\vec{x}_2 + y\vec{y}_2 + z\vec{z}_2$

La pale a une masse M. On donne l'opérateur d'inertie en A dans le repère R_2 :

$$[I]_{A,2} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{A,R_2}$$

Définition des actions mécaniques :

- L'action du vent sur la pale est modélisé par un glisseur d'axe central passant par K tel que : $\vec{AK} = \lambda\vec{x}_2 + \mu\vec{y}_2 + \nu\vec{z}_2$ (avec λ, μ et ν constantes) et de résultante $\vec{F}_v = F_x\vec{x}_2 + F_y\vec{y}_2$.
- L'action du ressort R sur l'ensemble pale est modélisée par un glisseur d'axe central passant par B tel que $\vec{AB} = -a\vec{y}_2 - a'\vec{z}_2$ et de résultante $\vec{F}_R = F_R\vec{x}_1$.
- L'action de la génératrice électrique (non représenté) sur 1 est modélisée par un torseur couple de moment $C_e\vec{x}_1$.

Qu. 1: Quels ensembles isoleriez-vous et quelles équations écririez-vous pour trouver les deux équations différentielles du mouvement liant les paramètres α, θ , leurs dérivées et les efforts extérieurs connus (vent, pesanteur, ressort, génératrice) ?

Qu. 2: Déterminer le moment cinétique en A de l'ensemble pale 2 dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_0 : exprimer ce vecteur par ses composantes dans le repère R_2 .

Qu. 3: Le rotor tournant à vitesse constante ($\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$) et l'angle de calage α restant constant au cours du mouvement étudié, calculer la projection sur l'axe \vec{z}_1 du moment dynamique en A de l'ensemble pale dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_0 .

Qu. 4: A partir des questions précédentes, écrire l'équation obtenue par projection sur l'axe \vec{z}_1 du théorème du moment dynamique en A appliqué à l'ensemble pale dans son mouvement par rapport au repère galiléen.

Le système de régulation est conçu pour éviter des mouvements brusques de la pale en fonction des caprices du vent. Cette régulation, purement mécanique, pratiquement indépendante des actions aérodynamiques, a pour principe de rendre prépondérants les effets d'inertie et l'action des ressorts devant les effets du vent. Pour réaliser ceci, la fixation de la pale sur son support a été étudiée pour rendre le point K le plus près possible de l'axe de la liaison pivot (λ et μ très petits) ce qui permet de considérer comme négligeable le moment par rapport à l'axe (A, \vec{z}_1) des actions du vent devant le moment des actions du ressort.

Qu. 5: *En tenant compte de cette remarque, écrire l'équation simplifiée du mouvement de l'ensemble pale.*

Qu. 6: *A quelles conditions les efforts appliqués par les ressorts sur l'ensemble pale sont-ils indépendants de la position angulaire θ du rotor quel que soit le calage α ? Ecrire la nouvelle équation simplifiée qui résulte de la prise en compte de ces conditions.*

Qu. 7: *Conclure.*

Exo 2

Pré-Dimensionnement de l'actionneur d'une nacelle à flèche télescopique

1. Présentation

Les nacelles sont utilisées pour effectuer des travaux en hauteur et éviter l'utilisation d'échafaudages. Il existe quatre principales familles de nacelles adaptées à des usages spécifiques :

- nacelles à flèche articulée,
- nacelles à flèche télescopique,
- nacelles à mât,
- nacelles à ciseaux.

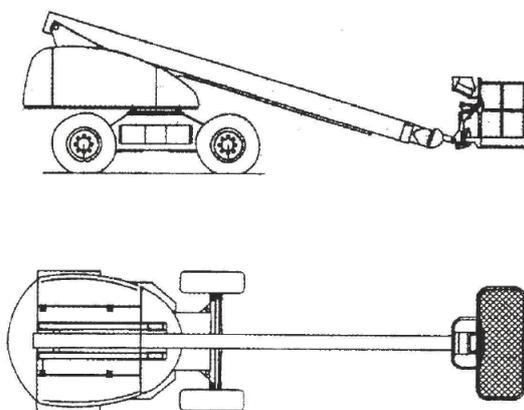


Figure 1 : nacelle à flèche télescopique

Ces systèmes sont autopropulsés et permettent donc à l'opérateur placé dans le panier de commander non seulement la hauteur, le pivotement, mais également de piloter la translation de la nacelle pour atteindre les zones de travail.

L'étude proposée portera sur une nacelle de type flèche télescopique (figure 1). L'énergie nécessaire est fournie principalement par un moteur thermique qui entraîne un groupe hydraulique. Un groupe électropompe de secours est également disponible en cas d'incident. Les différents actionneurs utilisés sont hydrauliques avec commande proportionnelle.

Les mouvements disponibles sont :

- la "translation" de la nacelle par quatre roues motrices,
- la direction par deux roues directrices avec mécanisme entraîné par un vérin,
- la rotation de la tourelle (360° en continu),
- le relevage de la flèche,
- le déploiement de la flèche télescopique,
- la rotation du panier autour d'un axe vertical,
- l'inclinaison du panier.

L'actionneur de la nacelle (un vérin hydraulique) doit satisfaire au cahier des charges présenté dans le tableau 1.

Objectif de l'étude:

Effectuer une étude préalable au dimensionnement du vérin de commande, en déterminant le débit maximal ainsi que la pression dans le vérin de relevage lors de l'opération de relevage. Comparer cette étude de pré-dimensionnement aux choix réalisés par l'industriel.

Fonction de service	Critère	Niveau
FS1 : Déployer la nacelle	Chargement maximal	500 kg
	Hauteur maxi	> 16 m
	Durée de relevage minimale	70 s

Tableau 1 : extrait du cahier des charges fonctionnel

On donne les éléments d'inertie suivants :

- Solide 1 : centre d'inertie G , masse M_1 , moment d'inertie par rapport à l'axe (O, \vec{z}_0) : I_1 ,
- Solide 2 : centre d'inertie K , masse M_2 , moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}_0) : I_2 ,
-

Application numérique : $M_1 = 2500\text{kg}$, $I_1 = 25000\text{kg.m}^2$, $M_2 = 500\text{kg}$, $I_2 = 150\text{kg.m}^2$

L'accélération de la pesanteur est notée $g = -g \cdot \vec{y}_0$ avec $g = 10\text{m.s}^{-2}$. Le vérin est décrit figure 2. Les diamètres internes et externes sont notés : $D_i = 180\text{mm}$ et $D_e = 240\text{mm}$.

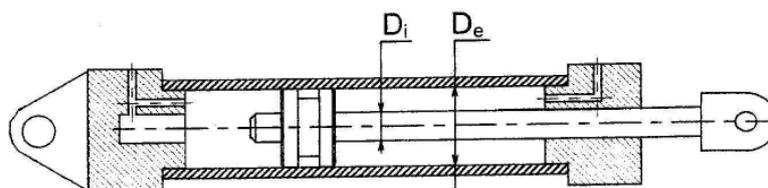


Figure 2 : vérin de relevage.

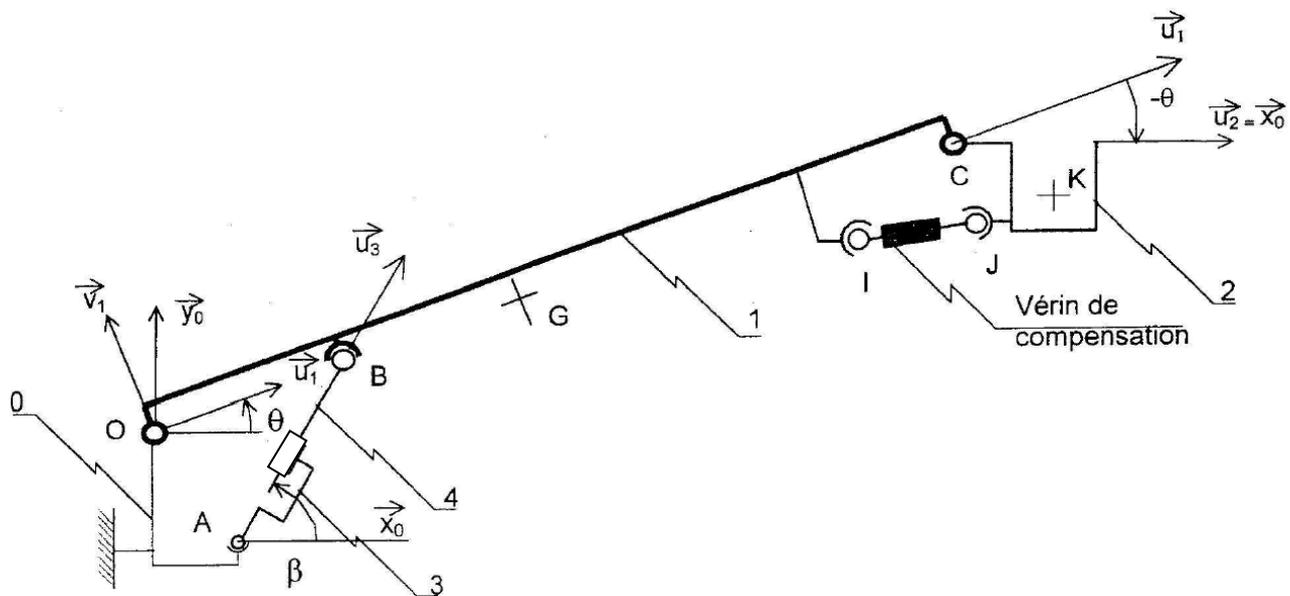


Figure 3 : schéma cinématique de la nacelle

2. Travail à réaliser

On donne les caractéristiques géométriques suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= c \cdot \vec{u}_1 & \overrightarrow{OA} &= a \cdot \vec{x}_0 - b \cdot \vec{y}_0 & \overrightarrow{AB} &= \lambda \cdot \vec{u}_3 & \overrightarrow{OG} &= d \cdot \vec{u}_1 & \overrightarrow{OC} &= 3 \cdot d \cdot \vec{u}_1 & \overrightarrow{CK} &= e \cdot \vec{u}_2 - f \cdot \vec{v}_2 \\ a &= 0,5m & b &= 1m & c &= 2m & d &= 6m & e &= 0,5m & f &= 1m \end{aligned}$$

On considère le châssis à l'arrêt sur un plan horizontal ; la tourelle est immobile. Pendant le relevage, le vérin évolue à vitesse constante. Les mouvements de télescopage ou de pivotement du panier par rapport à la tête de flèche sont inexistant.

On peut considérer 5 solides (figure 3). Lors de la rotation de la flèche 1 par rapport à la tourelle 0, en phase de relevage, le mouvement de compensation est supposé parfait : $\vec{u}_2 \approx \vec{x}_0$ (le panier reste horizontal).

Qu. 1 : Déterminer le débit maximum du vérin (atteint pour la durée du relevage minimale du cahier des charges), pour $\theta \in [-\pi/12 ; 5\pi/12]$.

Les masses des solides autres que 1 et 2 sont négligées. Les seuls actionneurs considérés sont le vérin de relevage et le vérin de compensation. L'action du vérin de compensation sur 1 est modélisable par un glisseur de résultante $\vec{R}(comp \rightarrow 1)$ et d'axe central (IJ).

On cherche dans cette partie du problème à déterminer quel est l'effort de poussée du vérin $F_{\text{vérin}}$, et donc la pression que doit fournir le vérin, lors de la phase de relevage.

Qu. 2 : Discuter en vous appuyant sur un graphe des liaisons de la stratégie de résolution de ce problème.

Qu. 3 : Résoudre le problème grâce au PFD.

Qu. 4 : Pour le chargement maximum du panier et pour la flèche sortie au maximum, on donne la courbe représentative de $F_{\text{vérin}}$ lors du relevage à débit maximum (figure 4). En déduire la pression maximum que nécessite le vérin.

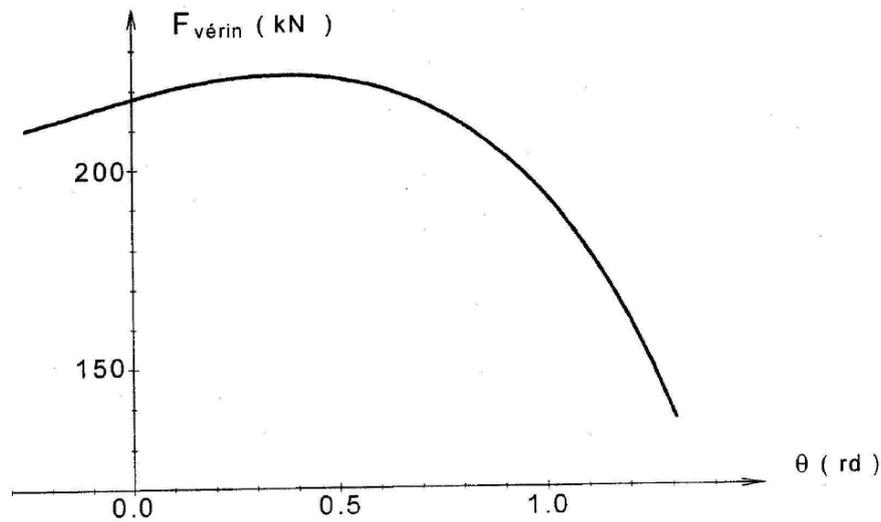


Figure 4 : courbe d'effort dans le vérin lors du relevage à débit maximum

Exo 3

Analyse de la stabilité et de la posture du robot Lola

Le développement de robots à forme humaine est en croissance constante depuis quelques dizaines d'années. En robotique, il est difficile d'affirmer que tous les robots remplaçant l'homme dans ses tâches doivent être de forme humaine. Les véhicules autonomes, par exemple, ne sont pas anthropomorphes. Les tâches auxquelles sont destinées les robots définissent leur forme idéale. Si nous souhaitons un jour que les robots remplacent l'homme dans ses tâches ennuyeuses, ils devront s'intégrer au mieux à notre société, à notre environnement et à notre ergonomie.

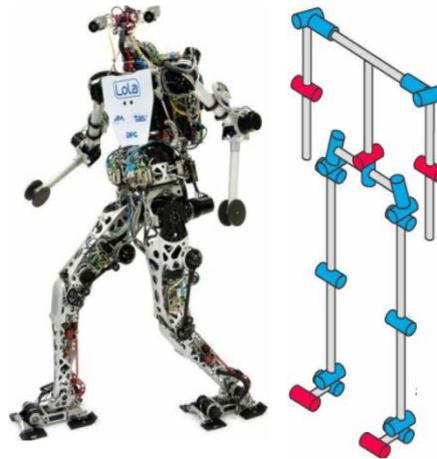


Figure 1 : le robot humanoïde LOLA et sa structure cinématique (sans la tête)

Les dimensions d'une maison et la hauteur des meubles sont adaptées à notre forme humaine. L'avantage des robots humanoïdes devient alors économique : il n'est pas indispensable de modifier l'environnement quotidien pour les utiliser.

Le robot humanoïde LOLA (figure 1), développé par l'Université de Munich, est un robot de forme humaine conçu pour un mode de marche rapide. LOLA possède une structure à 25 degrés de liberté lui permettant une flexibilité accrue. Chaque jambe possède 7 degrés de liberté, le haut du corps 8 et la tête 3.

Le robot est équipé d'une caméra stéréoscopique haute définition afin de percevoir son environnement, d'une centrale inertielle équipée de 3 gyroscopes et de 3 accéléromètres. Chaque articulation possède un codeur angulaire absolu et chaque pied est muni d'un capteur d'effort 6 axes permettant d'obtenir l'effort de contact avec le sol. Les caractéristiques techniques de LOLA sont données dans le tableau suivant:

Caractéristiques	Valeurs
Hauteur	180 cm
Masse	55 kg
Nombre de degrés de liberté	25
Vitesse de marche	5km/h maxi
Hauteur du centre de gravité	105cm

L'objectif de l'étude proposée est de justifier le respect du cahier des charges. Elle se décomposera en 3 parties : l'étude de la stabilité du robot bipède, la mesure de l'effort de contact avec le sol et l'étude des performances de l'asservissement angulaire du tronc.

3. Etude de la stabilité du robot

Par définition, le robot humanoïde bipède s'appuie sur ses deux jambes. Comme tout système de solides en équilibre statique, LOLA est à l'équilibre si la projection de son centre de gravité sur le sol est contenu dans le polygone de sustentation qui est tracé en noir autour de ses deux pieds sur la figure 2. Lorsque le robot marche, il y a une phase où il n'est en appui que sur un seul pied. Dans ce cas, le polygone de sustentation est réduit à un seul pied.

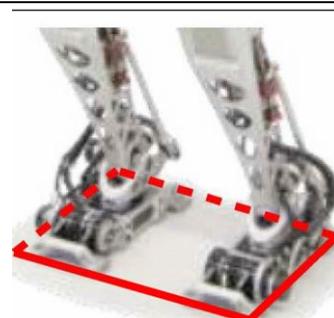


Figure 2 : polygone de sustentation sur deux pieds

L'objectif de cette partie est de trouver à quelle condition le maintien du contact sur le sol est possible lorsque le robot marche et si l'accélération est compatible avec le cahier des charges, dont un extrait est donné ci-après.

Exigence: Le robot ne doit pas basculer lors de la marche

Description : La position du ZMP* reste dans le polygone de sustentation

* : défini dans la suite

Exigence 1.1 : Le robot doit pouvoir atteindre les performances cibles

Sous-exigence	Description
Id=1.1.1	La longueur d'une foulée est de 150 cm au maximum
Id=1.1.2	Le robot peut accélérer jusqu'à $1,39 \text{ m.s}^{-2}$

Le contact du pied sur le sol est modélisé sans frottement sur la figure 3.

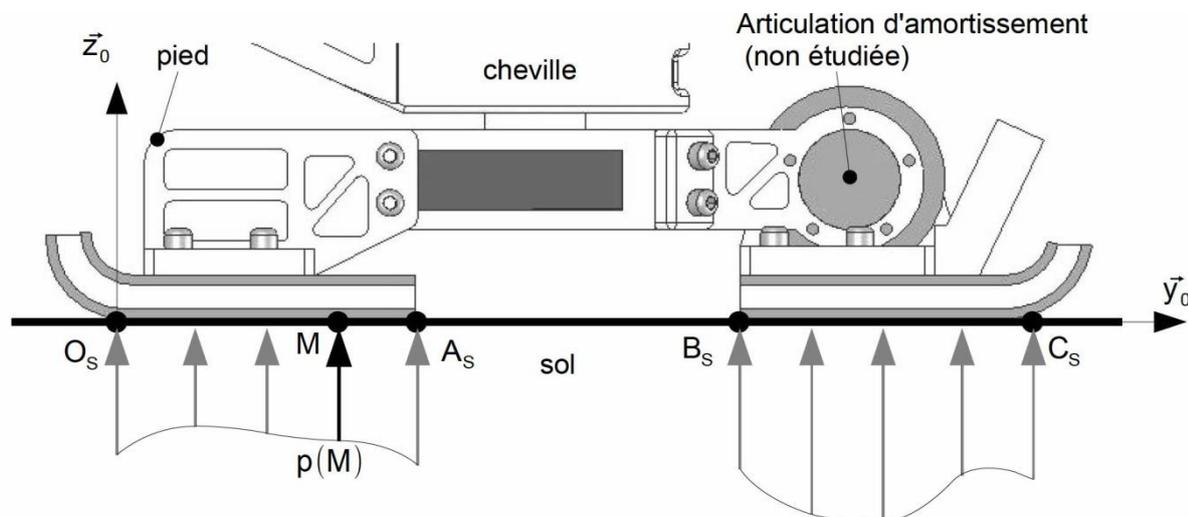


Figure 3 : modélisation du contact entre le pied et le sol

3.1 Modélisation de l'effort de contact entre le robot et le sol

Sous la semelle du robot, la pression de contact avec le sol est supposée répartie de manière uniforme transversalement (suivant la direction \vec{x}_0). Le problème se ramène donc à une répartition linéique de pression sur les deux segments de contact $[O_s; A_s]$ et $[B_s; C_s]$. En chaque point M (d'ordonnée y) de ces segments, la densité d'efforts de contact est $p(M)\vec{z}_0$, avec $p(M)$ en $N.m^{-2}$. On notera que si le robot n'est pas équipé de semelles magnétiques ou adhésives, on a $p(M) > 0$. Ainsi, en notant b la largeur de la semelle suivant \vec{x}_0 et $\Sigma = [O_s; A_s] \cup [B_s; C_s]$, le modèle global d'action mécanique de contact du sol sur le pied peut être donné par le torseur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} = b \int_{(M \in \Sigma)} p(M) \vec{z}_0 dy \\ \vec{M}_{(O_s, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = b \int_{(M \in \Sigma)} \vec{O_s M} \wedge p(M) \vec{z}_0 dy \end{array} \right\}$$

Qu. 8: Montrer que $\left\{ \vec{T}_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \right\}$ est un glisseur.

Soit H_s le point de la droite (O_s, \vec{y}_0) tel que $\vec{M}_{(H_s, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = \vec{0}$, on notera $\vec{O_s H_s} = Y_{H_s} \vec{y}_0$. Ce point est fondamental en robotique humanoïde, il prend le nom de Zero Moment Point (ZMP) : de l'anglais « point de moment nul ».

Qu. 9: Montrer que $H_s \in [O_s; C_s]$, c'est-à-dire qu'il est situé sous le pied du robot.

Qu. 10: Donner la forme du torseur $\left\{ \vec{T}_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \right\}$ dans le cas d'un contact avec frottement dans le plan sagittal (c'est-à-dire que la densité d'efforts de contact est $p(M)\vec{z}_0 + t(M)\vec{y}_0$). Montrer que les résultats des questions 1 et 2 sont inchangés.

3.2 Etablissement de la condition de non basculement

Considérons le robot en marche avec le torse ayant un mouvement de translation vers l'avant (suivant \vec{y}_0). Le robot est toujours dans la phase d'appui d'un seul pied sur le sol, via une des deux jambes notées (2).

Données et paramètres:

Torse (1) :

- masse m_1 , accélération de la pesanteur : $\vec{g} = -g \vec{z}_0$ avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$;
- centre de gravité : G , tel que $\vec{O}_S G = y_G(t) \vec{y}_0 + z_G \vec{z}_0$, le torse est supposé en mouvement de translation rectiligne, de direction \vec{y}_0 par rapport au sol, on a :

$$\{V_{1/\text{sol}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \frac{dY_G}{dt} \vec{y}_0 \end{array} \right\}$$

Jambes avec les pieds (2) :

masses et inerties négligeables dans cette phase.

N.B. : le pied d'appui est sans mouvement par rapport au sol.

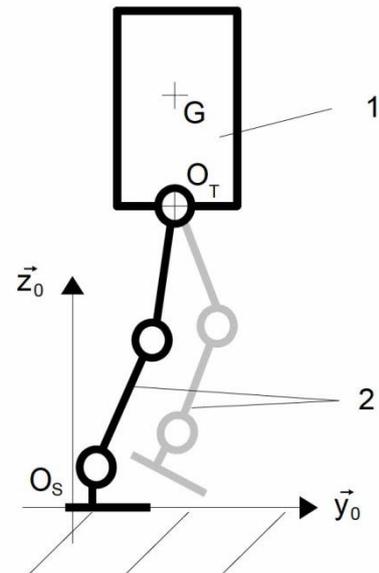


Figure 4 : modélisation du robot en marche

L'action mécanique du sol sur la semelle du pied est modélisée par le glisseur : $\{T_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}\}_{H_s} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$

- H_s est le ZMP, point mis en évidence à la question 2 tel que $\vec{O}_S H_s = Y_{H_s} \vec{y}_0$
- $\vec{R}_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} = N_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \vec{z}_0 + T_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \vec{y}_0$, avec à la limite du glissement $|T_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}| = \mu |N_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}|$ où μ est le facteur de frottement du contact sol/semelle.

Qu. 11: En appliquant le PFD au système {1+2}, montrer que la condition de stabilité (non

basculement) s'écrit : $Y_{H_s} = Y_G - \frac{Z_G}{g} \frac{d^2 Y_G}{dt^2}$

Conformément aux résultats précédents, le calculateur du robot contrôle en permanence la position du point H_s (ZMP) : s'il est positionné à l'intérieur du segment $[O_S; C_S]$, le robot ne bascule pas.

On appelle foulée, la longueur entre deux emplacements successifs d'appui du même pied. Lors du premier pas, le centre de gravité se déplace de sorte que $Y_G \in \left[-\frac{\text{foulée}}{4}; +\frac{\text{foulée}}{4} \right]$, car pour une accélération constante, les deux pas qui constituent une foulée sont de même longueur.

Le cahier des charges stipule qu'à partir de la station immobile, le robot doit atteindre la vitesse cible de 5 km.h^{-1} en une seconde, avec une accélération constante du centre de gravité $\frac{d^2 Y_G}{dt^2} = 1,39 \text{ m.s}^{-2}$. On rappelle que $Z_G = 105 \text{ cm}$.

Qu. 12: Sachant que la longueur de la semelle du robot $[O_S; C_S]$ est $L = 300 \text{ mm}$, déterminez la longueur de la première foulée du robot qui garantit la condition de non-basculement. Est-ce compatible avec le cahier des charges ?

Qu. 13: Dans le cas d'un sol relativement glissant, avec un facteur de frottement du contact sol/semelle $\mu = 0,1$, quelle accélération maximale $\left\{ \frac{d^2 Y_G}{dt^2} \right\}_{\text{MAX}}$ le robot peut-il avoir ? Est-ce compatible avec le cahier des charges pour la phase de démarrage ?

Expérimentalement, on mesure que l'accélération maximale que le robot peut avoir est de 0.75 m.s^{-2} .

Qu. 14: Commenter.

4. Contrôle de la posture du robot

Pour assurer une marche rapide et stable de LOLA, la méthode choisie est le contrôle de la verticalité du tronc du robot (figure 7). Le haut du corps (tronc, bras, tête) sera maintenu vertical en réalisant un asservissement de position angulaire au niveau de l'articulation de la hanche.

L'action mécanique de redressement est développée par l'ensemble de motorisation de tangage autour de l'axe (O_T, \vec{x}_0) .

Les performances à vérifier dans cette partie sont définies par les exigences suivantes :

Exigence 1.3 : le robot ne doit pas basculer lors de la marche	
Sous-exigence	Description
Id=1.3.2	La posture du robot est adaptée à la position du ZMP
Id=1.3.2.d	La performance dynamique de chaque axe permet de modifier la

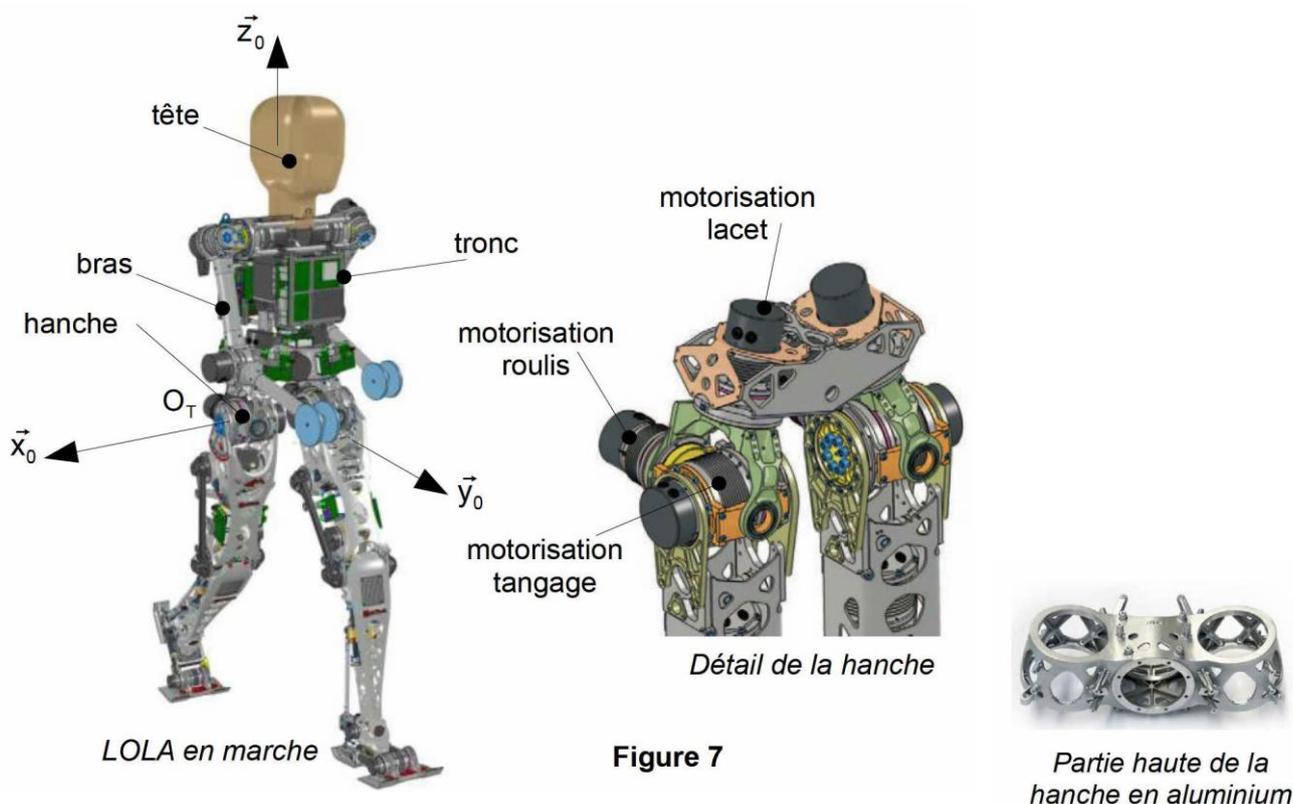


Figure 7

La chaîne structurelle permettant de modifier la posture du haut du corps autour de l'axe de tangage est représentée sur la figure 8. Elle est composée d'un moteur électrique (1,2) synchrone à aimants permanents piloté par un variateur électronique, d'un réducteur Harmonic-Drive® (3) de rapport de réduction 1/100, d'un codeur incrémental (5) ainsi que d'un codeur angulaire absolu (6+7).

Une centrale inertielle équipée d'un accéléromètre, d'un gyroscope et d'une unité de traitement permet d'obtenir en temps réel la valeur de l'angle d'inclinaison du haut du corps par rapport à la verticale.

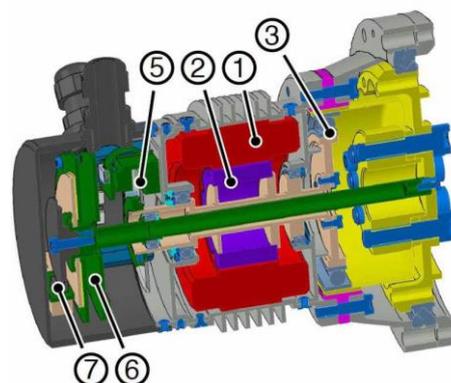


Figure 8

L'objectif de cette partie est de mettre en place un modèle du maintien vertical du tronc de LOLA et de déterminer une structure de commande permettant d'assurer les performances du cahier des charges de l'exigence 1.3.2.

Le modèle mécanique utilisé pour mener notre étude est donné sur la figure 9. L'association des liaisons entre le tronc et les jambes au niveau de la hanche est équivalente, dans le plan sagittal ($O_T, \vec{y}_0, \vec{z}_0$), à une liaison pivot d'axe (O_T, \vec{x}_0). Le tronc sera considéré comme un solide

admettant le plan $(O_T, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ comme plan de symétrie. Le cahier des charges stipule que LOLA doit pouvoir marcher à la vitesse de 5 km/h. Cette vitesse est atteinte en 1 s lors de la première foulée. La loi de commande en vitesse correspondante est représentée sur la figure 9.

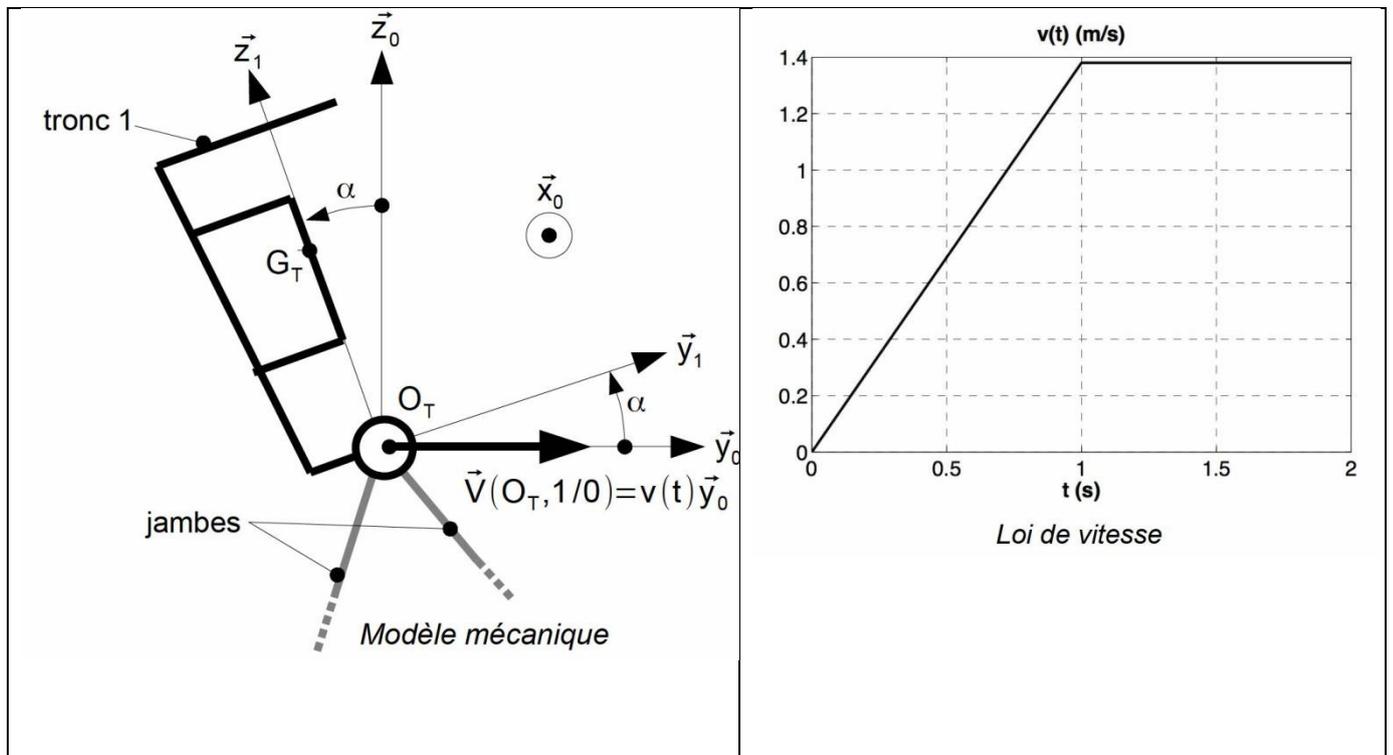


Figure 9

Le mouvement de marche est imposé et modélisé par le torseur cinématique en O_T du mouvement du tronc 1 par rapport au sol 0 :

$$\{V_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dt} \vec{x}_0 \\ v(t) \vec{y}_G \end{array} \right\}_{O_T}$$

Les caractéristiques d'inertie du tronc 1 de LOLA sont :

- la matrice d'inertie en O_T : $I(O_T, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{B_1}$
- position du centre de gravité: $O_T \vec{G}_T = Z_G \vec{z}_1$
- masse: m_1
- l'accélération de la pesanteur sera prise égale à $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

L'axe de sortie du réducteur exerce un couple de redressement sur le tronc 1 modélisé par le

torseur couple suivant : $\{T_{hd \rightarrow l}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{C}_R \quad \vec{x}_0 \end{array} \right\}$. L'angle α sera supposé faible pendant le mouvement

: $\cos \alpha \sim 1$ et $\sin \alpha \sim \alpha$

Qu. 15: Proposer une démarche de résolution afin d'obtenir l'équation différentielle du mouvement reliant α et ses dérivées successives aux données du problème. Effectuer un bilan des actions mécaniques extérieures au système matériel isolé.

Qu. 16: Développer l'ensemble des calculs pour déterminer l'équation différentielle reliant α et ses dérivées successives aux données du problème.

Qu. 17: Expérimentalement, comment faire pour limiter l'amplitude de rotation du tronc ?

Exo 1 - CORRIGE

Aérogénérateur

Question 1 : Quels ensembles isoleriez-vous et quelles équations écririez-vous pour trouver les deux équations différentielles du mouvement liant les paramètres α, θ , leurs dérivées et les efforts extérieurs connus (vent, pesanteur, ressort, génératrice) ?

- **On isole 2 : 1→2 ; Vent→2 ; pesanteur→2 ; ressort→2 .**

Théorème du moment dynamique en A en projection sur \vec{z}_2 :

$$\overrightarrow{\delta}_{A,2/R_0} \cdot \vec{z}_2 = \overrightarrow{M}_{A,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_2 + \overrightarrow{M}_{A, \text{Vent} \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_2 + \overrightarrow{M}_{\text{pesanteur} \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_2 + \overrightarrow{M}_{A, \text{ressort} \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_2$$

Or L12 : Pivot d'axe (A, \vec{z}_2) parfaite donc: $\overrightarrow{M}_{A,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_2 = 0$, soit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta}_{A,2/R_0} \cdot \vec{z}_2 &= (\overrightarrow{AK} \wedge \overrightarrow{F_v}) \cdot \vec{z}_2 + (\overrightarrow{AG} \wedge -Mg\vec{z}_0) \cdot \vec{z}_2 + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_r}) \cdot \vec{z}_2 \\ &= -Mg \sin \theta (x \cos \alpha - y \sin \alpha) + aF_r \cos \alpha + \lambda F_y - \mu F_x \end{aligned} \quad \text{:1ère équation du mouvement}$$

- **On isole 1+2+2' : 1→2 ; Vent→2 ; Vent→2' ; génératrice →1 ; pesanteur→2 ; pesanteur→2' ; pesanteur→1.**

Théorème du moment dynamique en O en projection sur \vec{x}_0 :

$$\overrightarrow{\delta}_{O,(1+2+2')/R_0} \cdot \vec{x}_0 = \overrightarrow{M}_{O, \text{vent} \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_0 + \overrightarrow{M}_{O, \text{vent} \rightarrow 2'} \cdot \vec{x}_0 + \overrightarrow{M}_{O, \text{génératrice} \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_0 \quad \text{car } \overrightarrow{M}_{O,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_0 = 0 \quad \text{et } \overrightarrow{M}_{O, \text{pesanteur} \rightarrow 1+2+2'} \cdot \vec{x}_0 = 0$$

par raison de symétrie.

$$\text{Soit : } \overrightarrow{\delta}_{O,(1+2+2')/R_0} \cdot \vec{x}_0 = (\overrightarrow{OK} \wedge \overrightarrow{F_v}) \cdot \vec{x}_0 + (\overrightarrow{OK}' \wedge \overrightarrow{F_v}') \cdot \vec{x}_0 + C_e = -2(vF_x \sin \alpha + vF_y \cos \alpha) + C_e$$

(2ème équation du mouvement)

Question 2 : Déterminer le moment cinétique en A de l'ensemble pale 2 dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_0 : exprimer ce vecteur par ses composantes dans le repère R_2 .

$$\overrightarrow{\sigma}_{A,2/R_0} = [I]_{(A,2)} \cdot \overrightarrow{\Omega}_{2/0} + M \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}_{A,2/0}$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{2/0} = \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}_1 = \dot{\theta} \cos \alpha \vec{x}_2 - \dot{\theta} \sin \alpha \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \vec{z}_2 ; \quad \overrightarrow{V}_{A,2/0} = a \dot{\theta} \vec{z}_2$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma}_{A,2/0} &= \left[(A \cos \alpha + F \sin \alpha) \dot{\theta} - E \dot{\alpha} + M a y \dot{\theta} \right] \vec{x}_2 - \left[(F \cos \alpha + B \sin \alpha) \dot{\theta} + D \dot{\alpha} + M a x \dot{\theta} \right] \vec{y}_2 \\ &+ \left(C \dot{\alpha} + (D \sin \alpha - E \cos \alpha) \dot{\theta} \right) \vec{z}_2 \end{aligned}$$

Question 3 : Le rotor tournant à vitesse constante ($\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$) et l'angle de calage α restant constant au cours du mouvement étudié, calculer la projection sur l'axe \vec{z}_1 du moment dynamique en A de l'ensemble pale dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_0 .

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{z}_1 &= \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A,2/0} \right] \cdot \vec{z}_1 + M \left(\vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G/0} \right) \cdot \vec{z}_1 \\ &= \frac{d}{dt} \left(\vec{\sigma}_{A,2/0} \cdot \vec{z}_1 \right) - \vec{\sigma}_{A,2/0} \cdot \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_0 + M \left(\vec{V}_{A/0}, \vec{V}_{G/0}, \vec{z}_1 \right)\end{aligned}$$

Or $\vec{V}_{1/0} // \vec{z}_1$ donc $(\vec{V}_{A/0}, \vec{V}_{G/0}, \vec{z}_1) = \vec{0}$

Avec $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$ et $\alpha = \text{cte}$, on obtient :

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{z}_1 = \left[(A - B) \sin \alpha \cos \alpha - F (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right] \dot{\theta}^2 + Ma \dot{\theta}^2 (y \sin \alpha - x \cos \alpha)$$

Question 4 :

$$\begin{aligned}\dot{\theta}^2 \left\{ \left[\frac{(A - B)}{2} \sin 2\alpha - F \cos 2\alpha \right] - Ma(x \cos \alpha - y \sin \alpha) \right\} \\ = -Mg \sin \theta (x \cos \alpha - y \sin \alpha) + aF_r \cos \alpha + \lambda F_y - \mu F_x\end{aligned}$$

Question 5 :

Il faut $x \cos \alpha - y \sin \alpha = 0 \quad \forall \alpha \Rightarrow x = y = 0$ d'où $\dot{\theta}^2 \left\{ \frac{(A - B)}{2} \sin 2\alpha - F \cos 2\alpha \right\} = aF_r \cos \alpha$:

équation qui permet de calculer α en fonction de $\dot{\theta}^2$ en régime établi.

Exo 2 - CORRIGE

Nacelle

A faire ...

Exo 3 CORRIGE

Analyse de la stabilité et de la posture du robot Lola

Stabilité du robot

MONTRER QUE {TSOL → PIED} EST UN GLISSEUR.

On cherche P tel que $\vec{M}(P, sol \rightarrow pied) = \vec{0}$

$$\text{Soit } P\vec{O}_S \wedge \int p \vec{z}_0 dy + \int O_S \vec{M} \wedge p \vec{z}_0 dy = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow P\vec{O}_S \cdot \int p dy + \int O_S \vec{M} \wedge p dy = \vec{0}$ d'où $O_S \vec{P} = \frac{\int O_S \vec{M} \wedge p dy}{\int p dy}$ donc P existe et $\{T_{sol \rightarrow pied}\}$ est un glisseur.

Ou plus simplement : un glisseur a sa résultante non nulle \vec{R} et orthogonale au moment $\forall P, \vec{R} \cdot \vec{M}(P) = 0$. Or $\forall P, \vec{R}(P, sol \rightarrow pied) \cdot \vec{M}(P, sol \rightarrow pied) = F \vec{z}_0 \cdot \int P \vec{M} \wedge p \vec{z}_0 dy = 0$ donc $\{T_{sol \rightarrow pied}\}$ est un glisseur.

MONTRER QUE $H_S \in [O_S; C_S]$, C'EST-A-DIRE QU'IL EST SITUÉ SOUS LE PIED DU ROBOT.

$$\text{D'après 1 on a : } O_S \vec{H}_S = \frac{\int p y dy}{\int p dy} \vec{y}_0 > \vec{0}$$

$$\text{de même } C_S \vec{H}_S = \frac{\int C_S \vec{M} \wedge p dy}{\int p dy} = -\frac{\int p y dy}{\int p dy} \vec{y}_0 < \vec{0}$$

Donc $H_S \in [O_S, C_S]$

DONNER LA FORME DU TORSEUR $\{T_{SOL \rightarrow PIED}\}$ DANS LE CAS D'UN CONTACT AVEC FROTTEMENT DANS LE PLAN SAGITTAL (C'EST-A-DIRE QUE LA DENSITÉ D'EFFORTS DE CONTACT EST $P(\vec{M})\vec{z}_0 + T(\vec{M})\vec{y}_0$). MONTRER QUE LES RESULTATS DES QUESTIONS 1 ET 2 SONT INCHANGÉS.

$$\{T_{sol \rightarrow pied}\}_{O_S} = \left\{ \begin{array}{l} b \int (p \vec{z}_0 + t \vec{y}_0) dy \\ b \int O_S \vec{M} \wedge p \vec{z}_0 dy \end{array} \right\} \text{ car } O_S \vec{M} // \vec{y}_0$$

$$\{T_{sol \rightarrow pied}\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} b \int p \vec{z}_0 dy \\ b \int O_S \vec{M} \wedge p \vec{z}_0 dy \end{array} \right\}}_{\text{glisseur en } H_S \text{ trouvé en 1}} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} b \int t \vec{y}_0 dy \\ \vec{0} \end{array} \right\}}_{\text{glisseur suivant } (O_S, \vec{y}_0)} \text{ est un glisseur en } H_S.$$

EN APPLIQUANT LE THEOREME DU MOMENT DYNAMIQUE, PUIS LE THEOREME DE LA RESULTANTE

dynamique au système {1+2}, montrer que la condition de stabilité (non basculement) s'écrit :

$$y_{H_s} = y_G - \frac{z_G}{g} \frac{d^2 y_G}{dt^2}.$$

Moment dynamique en Hs :

$$\vec{M}(H_s, sol \rightarrow pied).x_0 + \vec{M}(H_s, pes \rightarrow 1).x_0 = \vec{\delta}(H_s, 1 \cup 2/0).x_0$$

- $\vec{M}(H_s, pes \rightarrow 1).x_0 = (H_s G \wedge -m_1 g z_0).x_0 = ((y_G y_0 + z_G z_0 - y_{H_s} y_0) \wedge -m_1 g z_0).x_0 = -(y_G - y_{H_s}) m_1 g$
- $\vec{\delta}(H_s, 1 \cup 2/0).x_0 = (H_s G \wedge m_1 \frac{d^2 y_G}{dt^2} y_0).x_0 = -m_1 z_G \frac{d^2 y_G}{dt^2}$

Finalement : $(y_G - y_{H_s}) m_1 g = m_1 z_G \frac{d^2 y_G}{dt^2}$ d'où la condition de stabilité : $y_{H_s} = y_G - \frac{z_G}{g} \frac{d^2 y_G}{dt^2}$

SACHANT QUE LA LONGUEUR DE LA SEMELLE DU ROBOT [O_s;C_s] EST L=300 MM, DETERMINEZ LA

longueur maximale de la première foulée du robot qui garantit la condition de non- basculement. Est-ce compatible avec le cahier des charges ?

Le cas limite est pour $y_{H_s} = L$

$$y_G = y_{H_s} + \frac{z_G}{g} \frac{d^2 y_G}{dt^2} = 0,3 + \frac{1,05}{9,81} \times 1,39 = 0,449 \text{ m}$$

Foulée = $4.y_G = 1,795 \text{ m} > 1,5 \text{ m}$ donc le CdCf n'est pas respecté.

DANS LE CAS D'UN SOL RELATIVEMENT GLISSANT, AVEC UN FACTEUR DE FROTTEMENT DU CONTACT SOL /

semelle $\mu=0,1$ quelle accélération maximale $\left\{ \frac{d^2 y_G}{dt^2} \right\}_{MAX}$ le robot peut-il avoir ? Est-ce compatible avec le cahier des charges pour la phase de démarrage ?

On isole $1 \cup 2$ et on applique le théorème de la résultante en projection sur y_0 puis sur z_0 :

$$\underbrace{\vec{R}(sol \rightarrow 2).y_0}_{T_{sol \rightarrow 2}} + \underbrace{\vec{R}(pes \rightarrow 1).y_0}_0 = \vec{R}_d(1 \cup 2/0).y_0 = m_1 \frac{d^2 y_G}{dt^2}$$

$$\underbrace{\vec{R}(sol \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_0}_{N_{sol \rightarrow 2}} + \underbrace{\vec{R}(pes \rightarrow 1) \cdot \vec{z}_0}_{-m_1 \cdot g} = \vec{R}_d(1 \cup 2/0) \cdot \vec{z}_0 = 0$$

Condition d'adhérence $T_{sol \rightarrow 2} \leq \mu \cdot N_{sol \rightarrow 2}$ soit : $\frac{d^2 y_G}{dt^2} \leq \mu \cdot g = 0,981 \text{ m.s}^{-2} < 1,39 \text{ m.s}^{-2}$

Le cahier des charges n'est pas satisfait.

Contrôle de la posture de LOLA

PROPOSER UNE DEMARCHE DE RESOLUTION AFIN D'OBTENIR L'EQUATION DIFFERENTIELLE DU MOUVEMENT RELIANT A ET SES DERIVEES SUCCESSIVES AUX DONNEES DU PROBLEME. EFFECTUER UN BILAN DES ACTIONS MECANIQUES EXTERIEURES AU SYSTEME MATERIEL ISOLE.

Application du théorème du moment dynamique au tronc 1 dans le repère galiléen lié au sol (0)

$$\text{en } O_T \quad \text{en } \text{projection sur } \vec{x}_0 : \\ \vec{M}(O_T, pes \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 + \underbrace{\vec{M}(O_T, hd \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0}_{C_R} + \underbrace{\vec{M}(O_T, 2 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0}_0 = \vec{\delta}(O_T, 1/0) \cdot \vec{x}_0$$

Cette équation n'introduit pas d'inconnues de liaison ; on obtient bien l'équation de mouvement.

DEVELOPPER L'ENSEMBLE DES CALCULS POUR DETERMINER L'EQUATION DIFFERENTIELLE RELIANT A ET SES DERIVEES SUCCESSIVES AUX DONNEES DU PROBLEME.

$$\vec{M}(O_T, pes \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = (O_T \vec{G}_T \wedge -m_1 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = -m_1 g O_T \vec{G}_T \cdot \vec{y}_0 = m_1 g \cdot z_G \cdot \sin(\alpha)$$

$$\vec{\delta}(O_T, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}(O_T, 1/0) \cdot \vec{x}_0) + (\vec{V}(O_T/0) \wedge m_1 \cdot \vec{V}(G_T, 1/0)) \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{\sigma}(O_T, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = (I(O_T, 1) \cdot \vec{\Omega}(1/0)) \cdot \vec{x}_0 + (O_T \vec{G}_T \wedge m_1 \cdot \vec{V}(O_T, 1/0)) \cdot \vec{x}_0 = A_1 \cdot \dot{\alpha} - m_1 \cdot z_G \cdot v \cdot \cos(\alpha)$$

$$(\vec{V}(O_T/0) \wedge m_1 \cdot \vec{V}(G_T, 1/0)) \cdot \vec{x}_0 = m_1 \cdot v \cdot z_0 \cdot \vec{V}(G_T, 1/0) = -m_1 \cdot v \cdot z_0 \cdot z_G \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 = -m_1 \cdot z_G \cdot v \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin(\alpha)$$

$$\text{Soit } \vec{\delta}(O_T, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = A_1 \cdot \ddot{\alpha} - m_1 \cdot z_G \cdot \dot{v} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\text{D'où : } \boxed{m_1 g \cdot z_G \cdot \sin(\alpha) + C_R = A_1 \cdot \ddot{\alpha} - m_1 \cdot z_G \cdot \dot{v} \cdot \cos(\alpha)}$$