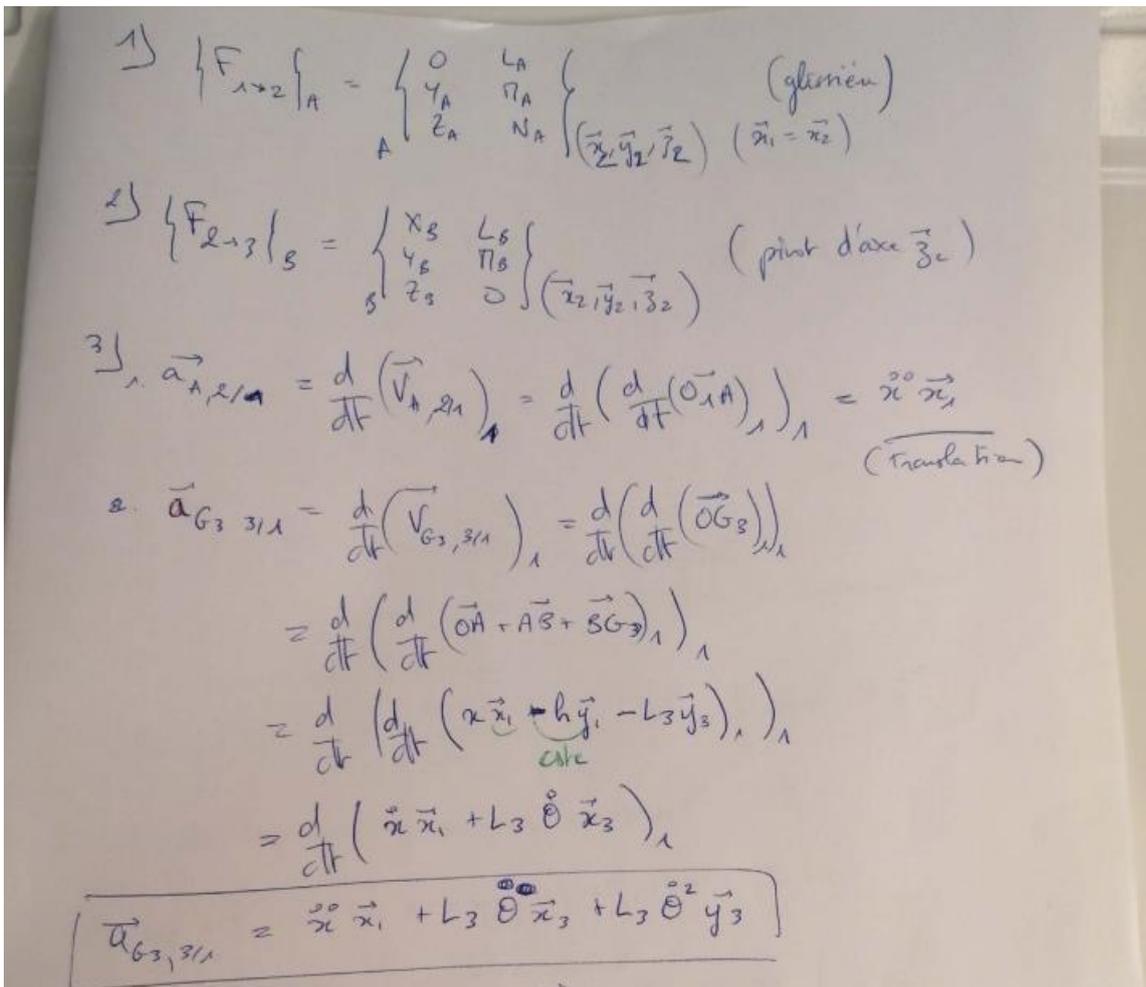


CHAPITRE 3

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

CORRECTION

1 PONT ROULANT (ATTENTION NUMEROTATION NON CONFORME AU TD)



$$\begin{aligned}
 \vec{G}_{B,3/1} &= \vec{G}_{G,3/1} + BG_3 \wedge \vec{v}_{G,3/1} \\
 &\downarrow \\
 &I_{G,3/1} \cdot \vec{\alpha}_{3/1} \\
 \begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ & C_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} &= C_3 \ddot{\theta} \vec{z}_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{donc} \\ \vec{BG}_3 \wedge \vec{v}_{G,3/1} = -L_3 \dot{\theta} \vec{y}_2 \wedge (m_3 \dot{x} \vec{x}_1 + L_3 \dot{\theta} \vec{x}_3) \\ = m_3 (\dot{x} L_3 \cos \theta \vec{z}_1 + L_3^2 \dot{\theta} \vec{z}_1) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$


---


$$\vec{G}_{B,3/1} = C_3 \ddot{\theta} \vec{z}_1 + m_3 L_3^2 \ddot{\theta} \vec{z}_1 + m_3 \dot{x} L_3 \cos \theta \vec{z}_1$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\delta}_{B,3/1} &= \frac{d}{dt} (\vec{v}_{B,3/1}) + m_3 \vec{v}_{B,1} \wedge \vec{v}_{G,3/1} \\
 &\downarrow \\
 &= (C_3 + m_3 L_3^2) \ddot{\theta} \vec{z}_1 + m_3 \dot{x} L_3 \cos \theta \vec{z}_1 - m_3 \dot{x} \dot{\theta} L_3 \sin \theta \vec{z}_1 \\
 &\left. \begin{array}{l} m_3 \dot{x} \dot{\theta} \vec{x}_1 \wedge (m_3 \dot{x} \vec{x}_1 + L_3 \dot{\theta} \vec{x}_3) \\ m_3 \dot{x} \dot{\theta} L_3 \sin \theta \vec{z}_1 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$


---


$$\Rightarrow \vec{\delta}_{B,3/1} = \underbrace{(C_3 + m_3 L_3^2)}_{J_3} \ddot{\theta} \vec{z}_1 + m_3 \dot{x} L_3 \cos \theta \vec{z}_1$$

on pourrait appeler ce terme  $J_3$  pour simplifier.

6) si on isole B on exploite la liaison pivot 3/2 et le moment autour de  $\vec{z}_1$ , car B ne fait pas apparaître d'inconnues de liaisons.

DATÉ :  $\{F_{g \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{l} mg \vec{y}_1 \\ 0 \end{array} \right\}$       $\{F_{2 \rightarrow 3}\}$  pivot B  $\vec{z}_1$ .

Théorème du moment dynamique autour de B,  $\vec{z}_1$ :

$$\vec{\delta}_{B,3/1} \cdot \vec{z}_1 = \left( \begin{array}{l} \vec{BG} \wedge -mg \vec{y}_1 \\ -L_3 \vec{y}_3 \end{array} \right) \cdot \vec{z}_1 + 0$$


---


$$\Rightarrow \underbrace{(C_3 + m_3 L_3^2)}_{J_3} \ddot{\theta} + m_3 \dot{x} L_3 \cos \theta = -mg L_3 \sin \theta \quad (1)$$

7.1)  $\dot{x} > 0$  à  $t=0$  nat  $t=0, \theta=0$  donc  $J_3 \ddot{\theta} = -m_3$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{m_3 L_3}{J_3} \dot{x} < 0 \text{ le Bar tourne vers l'arrière}$$

7.2) on isole  $k+3$  et on utilise la glimère 1/2 !!  
 (C) résultat dynamique sur  $\vec{x}_1$  ne fait pas intervenir d'équations de liaisons.

BATE Au (d+3):  $\{F_{g=3}\}, \{F_{g=2}\}, \{F_{g=1}\} + \text{Force à donner sur } \vec{x}_1$   
 glimère  $\vec{x}_1$

$\{D_{L+3/0}\} = \{D_{2/0}\} + \{D_{3/0}\}$   
 soit TH de la résultante dynamique sur  $\vec{x}_1$

$\vec{x}_1 (m_2 \vec{a}_{62/0} + m_3 \vec{a}_{63/0}) = (-m_3 g \vec{y}_1 - m_2 g \vec{y}_1) \vec{x}_1 + 0 + F$

donc  $m_2 \ddot{x}_1 + m_3 (\ddot{x}_1 + L_3 \ddot{\theta} \cos \theta - L_3 \dot{\theta}^2 \sin \theta) = 0 + F$   
 avec  $\ddot{\theta} = -\frac{m_3 L_3}{J_3} \ddot{x}_1$  à  $t=0$

$\Rightarrow \ddot{x}_1 \left( m_2 + m_3 - \frac{m_3 L_3^2}{J_3} \right) = F$

8) position stable  $\theta_s \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 = \ddot{\theta}$

(1) dérivé alors:  $m_3 \ddot{x}_1 \Delta \cos \theta = -m_3 g \Delta \sin \theta \Rightarrow \tan \theta = -\frac{\ddot{x}_1}{g}$

$\Rightarrow \theta_s = 5,8^\circ$  pour  $\ddot{x}_1 = 1$

9)  $\ddot{x}_1 = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0$

(1) dérivé alors  $J_3 \ddot{\theta} = -m_3 g L_3 \sin \theta$  (pendule simple)  
 en linéaire  
 $J_3 \ddot{\theta} + m_3 g L_3 \theta = 0$  eq Harmonique  
 $\Rightarrow$  oscillations harmoniques  
 (période  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{J_3}{m_3 g L}}$ )

**2 EXERCICE 2 : LE BEAU MANEGE (EN) (ATTENTION LA NUMEROTATION PEUT ETRE NON CONFORME A CELLE DU TD)**

1.a.  $\vec{\Omega}(3/R_1) = \vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/R_1) \Rightarrow \vec{\Omega}(3/R_1) = \dot{\theta} \cdot \vec{i}_2 + \dot{\phi} \cdot \vec{k}_1$

b.  $\vec{V}(M \in 3/R_1) = \vec{0}$ .  $\vec{V}(M \in 3/R_1) = \vec{V}(G \in 3/R_1) + \vec{\Omega}(3/R_1) \wedge \vec{GM} \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{L}{R} \dot{\phi}$

alors  $\vec{\Omega}(3/R_1) = \dot{\phi} \cdot \left(-\frac{L}{R} \cdot \vec{i}_2 + \vec{k}_1\right)$

**2. Eléments cinétiques :**

a.  $\vec{P}(2/R_1) = m_2 \cdot \vec{V}(A \in 2/R_1) \Rightarrow \vec{P}(2/R_1) = \vec{0}$

$\vec{\sigma}_A(2/R_1) = \vec{I}_A(2) \cdot \vec{\Omega}(2/R_1) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{A,B_2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = C_2 \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{k}_1$  donc  $\vec{\sigma}_A(2/R_1) = C_2 \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{k}_1$

b.  $\vec{P}(3/R_1) = m_3 \cdot \vec{V}(G \in 3/R_1) \Rightarrow \vec{P}(3/R_1) = m_3 \cdot L \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{j}_2$

$\vec{\sigma}_G(3/R_1) = \vec{I}_G(3) \cdot \vec{\Omega}(3/R_1) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix}_{G,B_3} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L}{R} \cdot \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\sigma}_G(3/R_1) = -A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{i}_2 + B_3 \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{k}_1$

*B<sub>3</sub> φ sin θ y<sub>3</sub> + B<sub>3</sub> φ cos θ z<sub>3</sub> idem*

Nota : (3) étant de révolution et sa rotation propre  $\dot{\theta}$  ayant lieu autour de son axe de révolution  $x_2$ , le calcul précédent donne les mêmes résultats qu'il soit effectué dans  $B_3$  (base liée à (3)) ou dans  $B_2$  (base liée à son axe de révolution). C'est donc dans  $B_2$  qu'il est plus commode d'effectuer les calculs car l'expression de  $\vec{\Omega}(3/R_1)$  est plus simple dans  $B_2$  que dans  $B_3$ .

$\vec{\sigma}_A(3/R_1) = \vec{\sigma}_G(3/R_1) + m_3 \cdot \vec{V}(G \in 3/R_1) \wedge \vec{GA}$   
 $\Rightarrow \vec{\sigma}_A(3/R_1) = -A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{i}_2 + (B_3 + m_3 \cdot L^2) \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{k}_1$

**3. Eléments dynamiques :**

a.  $\vec{Rd}(2/R_1) = m_2 \cdot \vec{\Gamma}(A \in 2/R_1) \Rightarrow \vec{Rd}(2/R_1) = \vec{0}$

$\vec{\delta}_A(2/R_1) = \left[ \frac{d(\vec{\sigma}_A(2/R_1))}{dt} \right]_{R_1} \Rightarrow \vec{\delta}_A(2/R_1) = C_2 \cdot \ddot{\phi} \cdot \vec{k}_1$

$$b. \overline{Rd}(3/R_1) = \left[ \frac{d(\overline{P}(3/R_1))}{dt} \right]_{R_1} \Rightarrow \overline{Rd}(3/R_1) = -m_3 \cdot L \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \vec{i}_2 + m_3 \cdot L \cdot \ddot{\varphi} \cdot \vec{j}_2$$

$$\overline{\delta}_G(3/R_1) = \left[ \frac{d(\overline{\sigma}_G(3/R_1))}{dt} \right]_{R_1} \Rightarrow \overline{\delta}_G(3/R_1) = -A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{i}_2 - A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \vec{j}_2 + B_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{k}_1$$

Pour  $\overline{\delta}_A(3/R_1)$ , deux méthodes :

- soit le changement de point en partant de  $\overline{\delta}_G(3/R_1)$  :  $\overline{\delta}_A(3/R_1) = \overline{\delta}_G(3/R_1) + m_3 \cdot \overline{\Gamma}(G \in 3/R_1) \wedge \overline{GA}$ ,

- soit  $\overline{\delta}_A(3/R_1) = \left[ \frac{d(\overline{\sigma}_A(3/R_1))}{dt} \right]_{R_1} + m_3 \cdot \overline{V}(A/R_1) \wedge \overline{V}(G \in 3/R_1)$ .

Comme  $\overline{V}(A/R_1) = \vec{0}$  cette méthode est ici la plus rapide :

$$\Rightarrow \overline{\delta}_A(3/R_1) = -A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{i}_2 - A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \vec{j}_2 + (B_3 + m_3 \cdot L^2) \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{k}_1$$

$$4. a. \{\mathcal{S}(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, B_1}, \quad b. \{\mathcal{S}(2 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} X_G & 0 \\ Y_G & M_G \\ Z_G & N_G \end{Bmatrix}_{G, B_2}, \quad c. \{\mathcal{S}(1 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} X_M & 0 \\ Y_M & 0 \\ Z_M & 0 \end{Bmatrix}_{M, B_2}$$

### 5. Inconnues de liaison en M.

a. S'il se produit un glissement en M, la vitesse de glissement  $\overline{V}(M \in 3/R_1)$  a alors pour direction  $y_2$  (démonstration voir ci-dessous) donc, d'après les lois de Coulomb,  $\overline{R}(1 \rightarrow 3)$  ne peut être que dans le plan  $(M, y_2, z_2) \Rightarrow X_M = 0$

Dém. :  $\overline{V}(M \in 3/R_1) = \overline{V}(G \in 3/R_1) + \overline{\Omega}(3/R_1) \wedge \overline{GM} = L \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{j}_2 + (\dot{\varphi} \cdot \vec{k}_1 + \dot{\theta} \cdot \vec{i}_2) \wedge -R \cdot \vec{k}_1$

$\Rightarrow \overline{V}(M \in 3/R_1) = (L \cdot \dot{\varphi} + R \cdot \dot{\theta}) \vec{j}_2$ . C.q.f.d.

b.  $Y_M$  ? Isoler (3).

$$\{\mathcal{S}(2 \rightarrow 3)\} + \{\mathcal{S}(\text{pesanteur} \rightarrow 3)\} + \{\mathcal{S}(1 \rightarrow 3)\} = \{\mathcal{D}(3/R_1)\}.$$

Compte tenu de la forme du torseur  $\{\mathcal{S}(2 \rightarrow 3)\}$ , la seule équation scalaire qui ne fait pas intervenir les inconnues de cette liaison est la projection sur  $x_2$  du moment dynamique de (3) exprimé en G. Le moment de la pesanteur n'a pas d'effet suivant cette direction.

$$\Rightarrow Y_M \cdot R = \overline{\delta}_G(3/R_1) \cdot \vec{i}_2 \Rightarrow Y_M = -A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \dot{\varphi} \quad \text{expression négative si } \dot{\varphi} \text{ est positif (voir$$

figure-réponse).

c.  $Z_M$  ? Isoler l'ensemble [(2), 4 roues (3)].

$$\{\mathcal{S}(1 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{S}(\text{pesanteur} \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{S}(\text{pesanteur} \rightarrow 3)\} + \{\mathcal{S}(1 \rightarrow 3)\} = \{\mathcal{D}(2/R_1)\} + \{\mathcal{D}(3/R_1)\}$$

Compte tenu de la forme du torseur  $\{\mathcal{S}(1 \rightarrow 2)\}$ , deux équations scalaires ne font pas intervenir les inconnues de cette liaison. Pour ce qui nous intéresse, la projection sur  $z_1$  de la résultante dynamique de l'ensemble [(2), (3)] permet de faire intervenir l'inconnue  $Z_M$  recherchée :

$$\Rightarrow 4 \cdot Z_M - (m_2 + 4 \cdot m_3) \cdot g = [\overline{Rd}(2/R_1) + 4 \cdot \overline{Rd}(3/R_1)] \cdot \vec{k}_1 \Rightarrow Z_M = \left( \frac{m_2}{4} + m_3 \right) \cdot g$$

e. L'angle  $\beta$  que fait la résultante avec la normale au contact en M est tel que  $\tan \beta = \frac{-Y_M}{Z_M}$  ( $Y_M < 0$ ,  $Z_M > 0$  alors  $\beta$  est positif et orienté selon  $+x_2$ , pour déterminer l'expression de la

$$\text{tangente il faut donc prendre } (-Y_M). \quad \tan \beta = \frac{-A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \dot{\varphi}}{\left( \frac{m_2}{4} + m_3 \right) \cdot g}$$

$$\text{La condition d'adhérence est } |\tan \beta| < \tan \varphi \Rightarrow \dot{\varphi} < \frac{\left( \frac{m_2}{4} + m_3 \right) \cdot g}{A_3 \cdot \frac{L}{R}} \quad \text{A.N : } \dot{\varphi} < 171.7 \text{ rad.s}^{-2}$$

6.a.  $\mathcal{C}_m$  ? Isoler l'ensemble [(2), 4 roues (3)].

$$\{\mathfrak{S}(1 \rightarrow 2)\} + \{\mathfrak{S}(\text{pesanteur} \rightarrow 2)\} + \{\mathfrak{S}(\text{pesanteur} \rightarrow 3)\} + \{\mathfrak{S}(1 \rightarrow 3)\} = \{\mathfrak{D}(2/R_1)\} + \{\mathfrak{D}(3/R_1)\}$$

Compte tenu de la forme du torseur  $\{\mathfrak{S}(1 \rightarrow 2)\}$ , la projection sur  $z_1$  du moment dynamique de l'ensemble [(2), 4x(3)] exprimé en A ne fait pas intervenir les inconnues de cette liaison entre (2) et (1). Le moment de la pesanteur n'a pas d'effet suivant cette direction.

$$\Rightarrow \mathcal{C}_m + 4LY_M = \bar{\delta}_A(2/R_1) \cdot \bar{k}_1 + 4 \cdot \bar{\delta}_A(3/R_1) \cdot \bar{k}_1 \Rightarrow \mathcal{C}_m = \left[ C_2 + 4 \cdot (B_3 + m_3 \cdot L^2 + A_3 \cdot \frac{L^2}{2}) \right] \cdot \ddot{\varphi}$$

A.N :  $\mathcal{C}_m < \underline{69,4.m.N}$ .

$$b. \mathcal{C}_m = C_T \cdot \ddot{\varphi} \Rightarrow C_T = C_2 + 4 \cdot (B_3 + m_3 \cdot L^2 + A_3 \cdot \frac{L^2}{2}) \cdot A.N : C_T = \underline{0,524. kg.m^2}$$

### 3 EXERCICE 3 : EPAS ANALYSE DU SYSTEME DE MANŒUVRE DU PARC ECHELLE (CCP 2007)

1. G centre de gravité de 5 donc,  $\bar{\sigma}_{G,50} = [I(5)]\bar{\Omega}_{250} = \begin{bmatrix} I_{Gx} & & \\ & I_{Gy} & \\ & & I_{Gz} \end{bmatrix}_{b_5} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = I_{Gz} \dot{\theta} \bar{z}_0$

$$\bar{\sigma}_{A,50} = \bar{\sigma}_{G,50} + \overrightarrow{AG} \wedge 3m \vec{V}_{G,50} = \bar{\sigma}_{G,50} + \overrightarrow{AG} \wedge 3m [\overrightarrow{GA} \wedge \bar{\Omega}_{250}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{Gz} \dot{\theta} \end{bmatrix}_{b_5} + 3m \begin{bmatrix} \frac{L-d}{2} & -d \\ \frac{h}{3} & \\ 0 & \end{bmatrix}_{b_5} \wedge - \begin{bmatrix} \frac{L-d}{2} & -d \\ \frac{h}{3} & \\ 0 & \end{bmatrix}_{b_5} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_{b_5}$$

$$\bar{\sigma}_{A,50} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{Gz} \dot{\theta} \end{bmatrix}_{b_5} + 3m \begin{bmatrix} \frac{L-d}{2} & -d \\ \frac{h}{3} & \\ 0 & \end{bmatrix}_{b_5} \wedge - \left( \frac{L-d}{2} \dot{\theta} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{Gz} \dot{\theta} \end{bmatrix}_{b_5} + 3m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[ \left( \frac{L-d}{2} \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \dot{\theta} \end{bmatrix}_{b_5}$$

$$\bar{\sigma}_{A,50} = \left[ I_{Gz} + 3m \left[ \left( \frac{L-d}{2} \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \dot{\theta} \bar{z}_0. \text{ Or A est fixe dans le mouvement de 5/0, donc :}$$

$$\bar{\delta}_{A,50} = \left[ \frac{d\bar{\sigma}_{A,50}}{dt} \right]_0 = \left[ I_{Gz} + 3m \left[ \left( \frac{L-d}{2} \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \ddot{\theta} \bar{z}_0$$

→ Ce que l'on retrouve bien sur, en utilisant Huygens :

$$\bar{\delta}(A,5/0) = \left[ \frac{d\bar{\sigma}(A,5/0)}{dt} \right]_{R_0}$$

$$\bar{\sigma}(A,5/0) = I(A,5) \cdot \bar{\Omega}(5/0) = \begin{bmatrix} I_{Ax} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Az} \end{bmatrix}_{(\bar{x}_5, \bar{y}_5, \bar{z}_0)} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = I_{Az} \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{z}_0$$

avec  $I_{Az} = I_{Gz} + 3 \cdot m \cdot \left[ \left( \frac{L-d}{2} \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right]$

$$\bar{\sigma}(A,5/0) = \left[ I_{Gz} + 3 \cdot m \cdot \left[ \left( \frac{L-d}{2} \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{z}_0 \text{ D'où } \bar{\delta}(A,5/0) = \left[ I_{Gz} + 3 \cdot m \cdot \left[ \left( \frac{L-d}{2} \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \cdot \ddot{\theta} \cdot \bar{z}_0$$

2. La plate-forme restant toujours horizontale, elle est animée d'un mouvement de translation (circulaire), on

en déduit donc  $\vec{\delta}_{G_p,60} = \vec{0}$ .

$$\vec{\delta}_{A,60} = \vec{\delta}_{G_p,60} + \overrightarrow{AG_p} \wedge M \vec{a}_{G_p,60}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{AG_p} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG_p} = H \vec{x}_5 + \lambda \vec{x}_0 + \mu \vec{y}_0,$$

$$\text{d'où, } \vec{V}_{G_p,60} = \left[ \frac{d\overrightarrow{AG_p}}{dt} \right]_0 = H\dot{\theta} \vec{y}_5, \text{ et } \vec{a}_{G_p,60} = \left[ \frac{d\vec{V}_{G_p,60}}{dt} \right]_0 = H\ddot{\theta} \vec{y}_5 - H\dot{\theta}^2 \vec{x}_5$$

Soit en effectuant le calcul dans la base 5 :

$$\vec{\delta}_{A,60} = M \begin{vmatrix} H + \lambda \cos\theta + \mu \sin\theta & -H\dot{\theta}^2 \\ -\lambda \sin\theta + \mu \cos\theta & H\ddot{\theta} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{z}_0 = M \left[ H\ddot{\theta}(H + \lambda \cos\theta + \mu \sin\theta) + H\dot{\theta}^2(-\lambda \sin\theta + \mu \cos\theta) \right] \vec{z}_0$$

$$\boxed{\vec{\delta}_{A,60} = M \left[ H\ddot{\theta}(H + \lambda \cos\theta + \mu \sin\theta) + H\dot{\theta}^2(-\lambda \sin\theta + \mu \cos\theta) \right] \vec{z}_0}$$

3. Les deux questions précédentes invitent clairement à isoler l'ensemble  $\{5+6\}$  et à appliquer le théorème du moment dynamique en A. Le graphe des liaisons complété des actions mécaniques extérieures représentées ci-dessous, permettait de s'en rendre compte.

Inventaire des actions mécaniques extérieures :

- 0 sur 5 :

$\vec{M}_A(0 \rightarrow 5)_{\vec{z}_0} = 0$ , c'est pour cela qu'il faut écrire le théorème du moment en A (pas d'inconnues de liaisons dans l'expression)

- Vérin 4 sur 5 :

d'après l'énoncé c'est un glisseur de résultante  $\vec{R} = R \vec{y}_3$ . Le point d'application n'étant pas donné on peut le justifier par l'isolement de 3+4 et le fait que leurs masses sont négligées (donc pas d'effet inertie). Ensemble soumis à 2 forces idem qu'en statique, opposées alignées donc avec (BC). On a donc

$$\vec{M}_A(0 \rightarrow 5)_{\vec{z}_0} = \underbrace{\vec{M}_C(0 \rightarrow 5)}_0_{\vec{z}_0} + (\overrightarrow{AC} \wedge R \vec{y}_3)_{\vec{z}_0} = cR(\vec{x}_5 \wedge \vec{y}_3)_{\vec{z}_0} = cR(\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_5)_{\vec{y}_3} = cR(\vec{y}_5 \cdot \vec{y}_3) = cR \cos(\theta - \dots)$$

- $\vec{g}$  sur 5 :

$$\vec{M}_A(\vec{g} \rightarrow 5)_{\vec{z}_0} = \underbrace{\vec{M}_G(\vec{g} \rightarrow 5)}_0_{\vec{z}_0} + (\overrightarrow{AG} \wedge -3mg \vec{y}_0)_{\vec{z}_0} = -3mg(\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_0) \cdot \overrightarrow{AG}$$

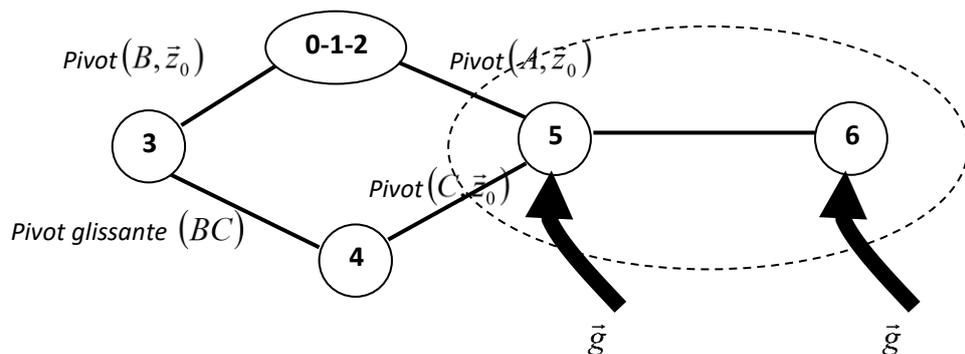
$$\vec{M}_A(\vec{g} \rightarrow 5)_{\vec{z}_0} = -3mg \vec{x}_0 \cdot \overrightarrow{AG} = -3mg \left[ \left( \frac{L}{2} - d \right) \cos\theta + \frac{h}{3} \sin\theta \right]$$

- $(A_i)$  sur 6 :

$$\vec{M}_A(\vec{g} \rightarrow 6)_{\vec{z}_0} = \underbrace{\vec{M}_{G_p}(\vec{g} \rightarrow 6)}_0_{\vec{z}_0} + (\overrightarrow{AG_p} \wedge -Mg \vec{y}_0)_{\vec{z}_0} = -Mg(\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_0) \cdot \overrightarrow{AG_p}$$

$$\vec{M}_A(\vec{g} \rightarrow 5)_{\vec{z}_0} = -Mg \vec{x}_0 \cdot \overrightarrow{AG_p} = -Mg[H \cos\theta + \lambda]$$

Théorème du moment dynamique à l'ensemble (5+6) en projection sur  $(A, \vec{z}_0)$  :



$$\left[ I_{Gz} + 3m \left[ \left( \frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \ddot{\theta} + M \left[ H \ddot{\theta} (H + \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta) + H \dot{\theta}^2 (-\lambda \sin \theta + \mu \cos \theta) \right] =$$

$$cR \cos(\theta - \beta) - 3mg \left[ \left( \frac{L}{2} - d \right) \cos \theta + \frac{h}{3} \sin \theta \right] - Mg [H \cos \theta + \lambda]$$

Soit l'expression de l'effort des vérins :

$$R = \frac{\left[ I_{Gz} + 3m \left[ \left( \frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \ddot{\theta} + M \left[ H \ddot{\theta} (H + \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta) + H \dot{\theta}^2 (-\lambda \sin \theta + \mu \cos \theta) \right] + 3mg \left[ \left( \frac{L}{2} - d \right) \cos \theta + \frac{h}{3} \sin \theta \right] + Mg [H \cos \theta + \lambda]}{c \cos(\theta - \beta)}$$

#### 4 EXERCICE 4 : VEHICULE TIM

##### A - Détermination du coefficient de résistance au roulement

**Q.1.** On isole le solide 1 et on effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME). On applique le Principe Fondamental de la Statique (PFS) au solide 1 en G.

Théorème de la résultante statique :

$$\text{En projection sur } \vec{x} : -T_{01} + m \cdot g \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\text{En projection sur } \vec{z} : N_{01} - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$$

Théorème du moment statique :

$$\text{En projection sur } \vec{y} : R \cdot T_{01} - C_r = 0$$

**Q.2.** A la limite du roulement on a  $C_r = r \cdot N_{01}$

$$\rightarrow R \cdot T_{01} - r \cdot N_{01} = 0 \rightarrow R \cdot m \cdot g \cdot \sin \alpha_{\text{lim}} - r \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha_{\text{lim}} = 0 \rightarrow R \cdot m \cdot g \cdot \sin \alpha_{\text{lim}} - r \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha_{\text{lim}} = 0$$

$$\rightarrow \tan \alpha_{\text{lim}} = \frac{r}{R}$$

**Q.3.** On incline le plan jusqu'à obtenir roulement de la roue  $\rightarrow$  on obtient expérimentalement  $\alpha_{\text{lim}}$ .

Pour  $\tan \alpha_{\text{lim}} = 0,008$  et  $R = 0,25$  m on a donc  $r = R \cdot \tan \alpha_{\text{lim}} = 0,25 \times 0,008 = 0,002$  m.

**Q.4.** Loi de Coulomb en phase d'adhérence on a  $T_{01} \leq f \cdot N_{01}$ . Il faut donc déterminer le rapport  $\frac{T_{01}}{N_{01}}$  :

$$\text{On a } T_{01} = m \cdot g \cdot \sin \alpha \text{ et } N_{01} = m \cdot g \cdot \cos \alpha \rightarrow \frac{T_{01}}{N_{01}} = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m \cdot g \cdot \cos \alpha} = \tan \alpha$$

Pour  $\alpha = \alpha_{\text{lim}}$  on a donc  $\frac{T_{01}}{N_{01}} = 0,008 < 0,5 \rightarrow$  Il y a roulement mais non glissement de la roue.

##### B - Modélisation du véhicule

**Q.5.** Condition de Roulement Sans Glissement (RSG) au point  $A_{23}$  :  $\vec{V}_{A_{23},23/0} = \vec{0}$

Condition de RSG au point  $A_4$  :  $\vec{V}_{A_4,4/0} = \vec{0}$

$$\vec{V}_{A_{23},23/0} = \vec{0} \rightarrow \vec{V}_{A_{23},23/1} + \vec{V}_{A_{23},1/0} = \vec{0} \rightarrow -R \cdot \dot{\theta}_{23} + \dot{x} = 0$$

$$\vec{V}_{A_4,4/0} = \vec{0} \rightarrow \vec{V}_{A_4,4/1} + \vec{V}_{A_4,1/0} = \vec{0} \rightarrow -R \cdot \dot{\theta}_4 + \dot{x} = 0$$

**Q.6.** On isole l'ensemble  $E=1+2-3+4$ , on effectue le BAME et on applique le PFD sur E.

Théorème de la résultante dynamique :  $\overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E}} = \overrightarrow{R_{d E/R}}$

Avec  $\overrightarrow{R_{d E/R}} = \overrightarrow{R_{d E/0}} = \overrightarrow{R_{d 1/0}} + \overrightarrow{R_{d 23/0}} + \overrightarrow{R_{d 4/0}}$

$\overrightarrow{R_{d 1/0}} = M \cdot \overrightarrow{a_{G_1, 1/0}} = M \cdot \ddot{x} \cdot \vec{x}$

$\overrightarrow{R_{d 23/0}} = M \cdot \overrightarrow{a_{O_{23}, 23/0}} = 2 \cdot m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{x}$  ( $O_{23}$  est cdg de 23)

$\overrightarrow{R_{d 23/0}} = m \cdot \overrightarrow{a_{O_4, 4/0}} = m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{x}$  ( $O_4$  est cdg de 4)

$\rightarrow \overrightarrow{R_{d E/R}} = (M + 3 \cdot m) \cdot \ddot{x} \cdot \vec{x}$

Théorème de la résultante dynamique :

En projection sur  $\vec{x}$  :  $-\overline{T_{023}} - \overline{T_{04}} + (M + 3 \cdot m) \cdot g \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot C_x \cdot \dot{x}^2 = (M + 3 \cdot m) \cdot \ddot{x}$

En projection sur  $\vec{z}$  :  $\overline{N_{023}} + \overline{N_{04}} - (M + 3 \cdot m) \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$

**Q.7.** On isole l'ensemble roue 23, on effectue le BAME et on applique le PFD sur 23 en  $O_{23}$ .

Théorème de la résultante dynamique en  $O_{23}$  en projection sur  $\vec{y}$  :  $\overrightarrow{\delta_{O_{23}, 23/0}} \cdot \vec{y} = \overrightarrow{M_{O_{23}(\vec{23} \rightarrow 23)}} \cdot \vec{y}$

Avec  $\overrightarrow{\delta_{O_{23}, 23/0}} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{O_{23}, 23/0}} \Big|_0$  car  $O_{23}$  centre de gravité de 23 et  $\overrightarrow{\sigma_{O_{23}, 23/0}} = I_{O_{23}}(23) \cdot \overrightarrow{\Omega_{23/0}}$  car  $O_{23}$  centre de

gravité de 23  $\rightarrow \overrightarrow{\delta_{O_{23}, 23/0}} \cdot \vec{y} = 2 \cdot I \cdot \ddot{\theta}_{23}$ .

$\rightarrow \boxed{2 \cdot I \cdot \ddot{\theta}_{23} = -N_{023} \cdot r + T_{023} \cdot R}$

On isole la roue 4, on effectue le BAME et on applique le PFD sur 4 en  $O_4$ .

Théorème de la résultante dynamique en  $O_4$  en projection sur  $\vec{y}$  :  $\overrightarrow{\delta_{O_4, 4/0}} \cdot \vec{y} = \overrightarrow{M_{O_4(\vec{4} \rightarrow 4)}} \cdot \vec{y}$

Avec  $\overrightarrow{\delta_{O_4, 4/0}} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{O_4, 4/0}} \Big|_0$  car  $O_4$  centre de gravité de 4 et  $\overrightarrow{\sigma_{O_4, 4/0}} = I_{O_4}(4) \cdot \overrightarrow{\Omega_{4/0}}$  car  $O_4$  centre de gravité de

4  $\rightarrow \overrightarrow{\delta_{O_4, 4/0}} \cdot \vec{y} = I \cdot \ddot{\theta}_4$ .

$\rightarrow \boxed{I \cdot \ddot{\theta}_4 = -N_{04} \cdot r + T_{04} \cdot R + C_m}$

**Q.8.**  $-\overline{T_{023}} - \overline{T_{04}} + (M + 3 \cdot m) \cdot g \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot C_x \cdot \dot{x}^2 = (M + 3 \cdot m) \cdot \ddot{x}$

$\overline{N_{023}} + \overline{N_{04}} - (M + 3 \cdot m) \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$

$2 \cdot I \cdot \ddot{\theta}_{23} = -N_{023} \cdot r + T_{023} \cdot R$

$I \cdot \ddot{\theta}_4 = -N_{04} \cdot r + T_{04} \cdot R + C_m$

$-R \cdot \dot{\theta}_{23} + \dot{x} = 0$

$-R \cdot \dot{\theta}_4 + \dot{x} = 0$

$C_m = N_{04} \cdot r - T_{04} \cdot R + I \cdot \ddot{\theta}_4$

$N_{04} = (M + 3 \cdot m) \cdot g \cdot \cos \alpha - N_{023}$

$\rightarrow C_m = (M + 3 \cdot m) \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot r - N_{023} \cdot r - T_{04} \cdot R + I \cdot \ddot{\theta}_4$

$$2.l.\ddot{\theta}_{23} - T_{023}.R = -N_{023}.r$$

$$\rightarrow C_m = (M+3.m).g.\cos\alpha.r + 2.l.\ddot{\theta}_{23} - T_{023}.R - T_{04}.R + l.\ddot{\theta}_4$$

$$-T_{023} - T_{04} = (M+3.m).\ddot{x} - (M+3.m).g.\sin\alpha + \frac{1}{2}\rho.S.C_x.\dot{x}^2$$

$$\rightarrow C_m = (M+3.m).g.\cos\alpha.r + 2.l.\ddot{\theta}_{23} + l.\ddot{\theta}_4 + R \left[ (M+3.m).\ddot{x} - (M+3.m).g.\sin\alpha + \frac{1}{2}\rho.S.C_x.\dot{x}^2 \right]$$

$$\dot{\theta}_{23} = \frac{\dot{x}}{R} \rightarrow \ddot{\theta}_{23} = \frac{\ddot{x}}{R} \text{ et } \dot{\theta}_4 = \frac{\dot{x}}{R} \rightarrow \ddot{\theta}_4 = \frac{\ddot{x}}{R}$$

$$\rightarrow C_m = (M+3.m).g.\cos\alpha.r + 2.l.\frac{\ddot{x}}{R} + l.\frac{\ddot{x}}{R} + R.(M+3.m).\ddot{x} - R.(M+3.m).g.\sin\alpha + \frac{1}{2}R.\rho.S.C_x.\dot{x}^2$$

$$\rightarrow C_m = (M+3.m).g.\cos\alpha.r + \left[ \frac{3.l}{R} + R.(M+3.m) \right].\ddot{x} - R.(M+3.m).g.\sin\alpha + \frac{1}{2}R.\rho.S.C_x.\dot{x}^2$$

**Q.9.** D'après l'équation scalaire obtenue question précédente le couple moteur peut se décomposer comme étant «  $C_m$  = couple pour vaincre la résistance au roulement + couple pour vaincre les effets inertiels du véhicule – couple lié au binôme poids/pente + couple pour vaincre l'action du vent sur le véhicule ».

**Q.10.** A vitesse constante sur une piste horizontale on obtient :  $C_m = (M+3.m).g.r + \frac{1}{2}R.\rho.S.C_x.\dot{x}^2$ .

**Q.11.** Pour  $t = 500$  s on est à vitesse constante  $\rightarrow \dot{x} = 16\text{m/s} \rightarrow \frac{1}{2}\rho.S.C_x = \frac{C_m - (M+3.m).g.r}{R.\dot{x}^2}$

A.N. :  $\frac{1}{2}\rho.S.C_x = \frac{3,245 - (70 + 3 \times 1).10 \times 0,002}{0,25 \times 16^2} = 0,028 \text{ kg/m}$

**Q.12.** A vitesse constante de  $5\text{km/h} = 1,39 \text{ m/s}$  et en négligeant la résistance au roulement, on obtient

l'expression de l'angle  $\alpha$  :  $\sin\alpha = \frac{C_m - \frac{1}{2}R.\rho.S.C_x.\dot{x}^2}{-R.(M+3.m).g}$

A.N. :  $\alpha = \arcsin \frac{3,245 - \frac{1}{2}0,25 \times 0,028 \times 1,39^2}{-0,25.(70 + 3 \times 1).10} = -1^\circ$

Ce qui correspond, compte tenu du paramétrage, à une pente à gravir de  $1^\circ$ .

## 5 EXERCICE 5 : CONTROLE DE CHUTE EVENTUELLE D'UN ASCENSEUR

**Question 1.** Forme de cette matrice d'inertie.

Une matrice d'inertie est symétrique.

Le plan  $(B, \vec{x}_B, \vec{y}_B)$  est plan de symétrie matérielle du balancier donc  $D = \iiint yz \, dm = 0$  et  $E = \iiint xz \, dm = 0$

**Question 2.** Moment dynamique du balancier en B dans son mouvement par rapport au bâti :  $\vec{\delta}_{\text{balancier/bâti}}^B$  (le porte-balancier est fixe). On pose :  $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_B)$ .

B est un point fixe donc :  $\vec{\delta}_{\text{balancier/bâti}}^B = \left( \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{\text{balancier/bâti}}^B \right)_R$

$$\text{et } \vec{\sigma}_{\text{balancier/bâti}}^B = [I_B(\text{balancier})] \vec{\Omega}(\text{balancier/bâti}) = \begin{bmatrix} J_x & -F & 0 \\ -F & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = J_z \dot{\theta} \vec{z}$$

$$\text{donc } \vec{\delta}_{\text{balancier/bâti}}^B = J_z \ddot{\theta} \vec{z}$$

**Question 3.** On isole S={ balancier + le galet}.

Bilan des actions mécaniques exercées sur l'ensemble S:

- Action de la came sur le galet (intensité nulle au moment de la rupture du contact galet came.
- Liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z})$  entre le porte balancier et le balancier.
- Action du ressort sur le balancier exerçant un couple supposé constant  $C_{\text{ressort}}$  autour de  $(B, \vec{z})$ .
- Action de la pesanteur négligée

On applique le théorème du moment dynamique en B en projection sur  $\vec{z}$ .

$$\sum M_{\vec{S} \rightarrow S}^B \cdot \vec{z} = \vec{\delta}_{S/bâti}^B \cdot \vec{z}$$

$$C_{\text{ressort}} = J_z \ddot{\theta}_{\text{lim}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\ddot{\theta}_{\text{lim}} = \frac{C_{\text{ressort}}}{J_z}}$$

**Hypothèse :** Si  $\omega = \text{cste}$  alors on supposera  $\theta = \theta_0 \sin(4\omega t)$ .

**Question 4.** Au vu des courbes, valider cette hypothèse et déterminer  $\theta_0$  en degrés.

Q4) Sur le graphique, on peut observer une courbe sinusoïdale centrée sur l'axe des abscisses avec 4 périodes pour 1 seconde. La courbe est tracée pour  $\omega = 1 \text{ tour/s} = 2\pi \text{ rad/s}$ .

Donc  $\theta = \theta_0 \sin(4\omega t)$  avec  $\theta_0 = 8,5^\circ$

Q5)  $\theta^{\circ} = -16\omega^2 \theta_0 \sin 4\omega t$  maxi pour  $\sin 4\omega t = -1$ ;  $\theta^{\circ}_{\text{maxi}} = 16\omega^2 \theta_0$  soit  $\omega_{\text{limite}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{C_{\text{ress}}}{J_z \theta_0}}$  avec  $\theta_0 = 0,15 \text{ rd}$