

CHAPITRE 1

CINEMATIQUE ET STATIQUE DES CHAINES DE SOLIDES

CORRECTION

1 EXERCICE 1: TOUR DE LA TERREUR

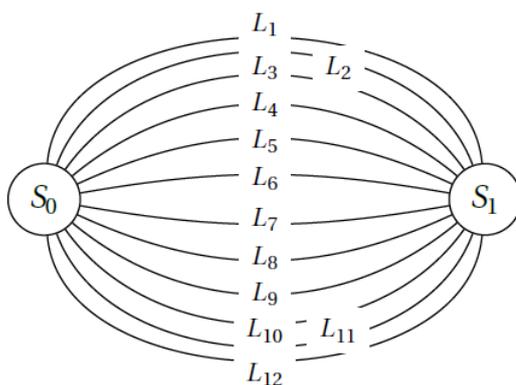
6) Le torseur cinématique de la liaison pivot en A est  $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{21}^z & 0 \end{array} \right\}_{A,(\vec{n},\vec{t},\vec{z})}$

$= \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & -R\omega_{21}^z \\ \omega_{21}^z & 0 \end{array} \right\}_{B,(\vec{n},\vec{t},\vec{z})}$ . Celui de la ponctuelle en B est  $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{10}^x & 0 \\ \omega_{10}^y & v_{10}^y \\ \omega_{10}^z & v_{10}^z \end{array} \right\}_{B,\vec{n},\vec{t},\vec{z}}$ .

La somme de ces deux torseurs conduit donc à  $\{\mathcal{V}_{2/0}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{10}^x & 0 \\ \omega_{10}^y & v_{10}^y - R\omega_{21}^z \\ \omega_{21}^z + \omega_{10}^z & v_{10}^z \end{array} \right\}_{B,\vec{n},\vec{t},\vec{z}}$

On reconnaît le torseur cinématique d'une liaison ponctuelle de normale  $\vec{n}$ .

7) En notant  $S_0$  le sous-ensemble constitué des rails et  $S_1$  la cabine, on obtient le graphe des liaisons de la figure 6.27.



- L1 Sphère plan – Normale (A,  $\vec{x}$ )
- L2 Sphère plan – Normale (A,  $\vec{x}$ )
- L3 Sphère plan – Normale (A,  $\vec{y}$ )
- L4 Sphère plan – Normale (C,  $\vec{x}$ )
- L5 Sphère plan – Normale (C,  $\vec{x}$ )
- L6 Sphère plan – Normale (C,  $\vec{y}$ )
- L7 Sphère plan – Normale (B,  $\vec{x}$ )
- L8 Sphère plan – Normale (B,  $\vec{x}$ )
- L9 Sphère plan – Normale (B,  $\vec{y}$ )
- L10 Sphère plan – Normale (D,  $\vec{x}$ )
- L11 Sphère plan – Normale (D,  $\vec{x}$ )
- L12 Sphère plan – Normale (D,  $\vec{y}$ )

8) Le torseur d'une liaison ponctuelle d'axe  $(O, \vec{x})$  est :  $\left\{ \begin{array}{c|c} \omega_x & 0 \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{array} \right\}_{O,(\vec{x},-, -)}$ . Le tor-

seur d'une liaison ponctuelle d'axe  $(O, \vec{y})$  est  $\left\{ \begin{array}{c|c} \omega_x & v_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & v_z \end{array} \right\}_{O,(-, \vec{y}, -)}$ .

9) On démontre le résultat pour l'une des liaisons (par exemple en A). On observe 3 liaisons en parallèle écrites au même point dans la même base, il faut donc égaliser leur torseur cinématique pour déterminer le torseur équivalent.

$$\text{Ainsi, } \left\{ \mathcal{V}_{\text{eq}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x1} & v_{x1} \\ \omega_{y1} & 0 \\ \omega_{z1} & v_{z1} \end{array} \right\}_{A,(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x2} & 0 \\ \omega_{y2} & v_{y2} \\ \omega_{z2} & v_{z2} \end{array} \right\}_{A,(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x3} & 0 \\ \omega_{y3} & v_{y3} \\ \omega_{z3} & v_{z3} \end{array} \right\}_{A,(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

On en déduit alors que  $v_{y2} = v_{y3} = 0$  et que  $v_{x1} = 0$ . Il reste alors :  $\left\{ \mathcal{V}_{\text{eq}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & v_z \end{array} \right\}_{A,(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

qui est bien le torseur cinématique d'une liaison sphère-cylindre en A d'axe  $(A, \vec{z})$ .

10) On considère maintenant deux liaisons sphère-cylindre en A d'axe  $(A, \vec{z})$  et en C d'axe  $(C, \vec{z})$ . Les liaisons sont en parallèle, on égalise au même point dans la même base les deux torseurs. Le torseur d'une liaison sphère-cylindre en A est le

suisant :  $\left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x1} & 0 \\ \omega_{y1} & 0 \\ \omega_{z1} & v_{z1} \end{array} \right\}_{A,(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ . Celui en C est défini par :  $\left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x2} & 0 \\ \omega_{y2} & 0 \\ \omega_{z2} & v_{z2} \end{array} \right\}_{C,(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ . Il faut

donc déplacer le premier torseur en C. Ainsi  $\vec{V}(C) = \vec{V}(A) + \overrightarrow{CA} \wedge (\omega_{x1} \vec{x} + \omega_{y1} \vec{y} +$

$\omega_{z1} \vec{z})$  soit  $\vec{V}(C) = v_{z1} \vec{z} + h\omega_{x1} \vec{y} - h\omega_{y1} \vec{x}$ . On obtient alors :  $\left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x2} & 0 \\ \omega_{y2} & 0 \\ \omega_{z2} & v_{z2} \end{array} \right\}_{C,(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} =$

$\left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x1} & -h\omega_{y1} \\ \omega_{y1} & h\omega_{x1} \\ \omega_{z1} & v_{z1} \end{array} \right\}_{C,(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ . On en déduit que  $\omega_{y1} = \omega_{y2} = 0$  et  $\omega_{x1} = \omega_{x2} = 0$ . Il reste

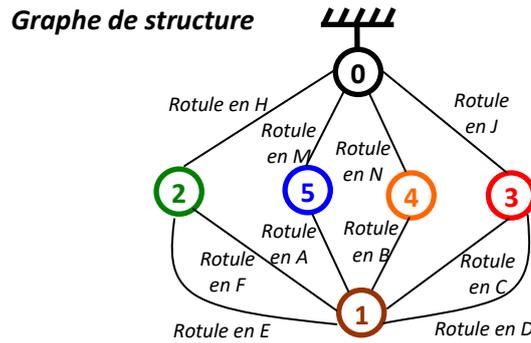
alors :  $\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & v_z \end{array} \right\}_{C,(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$  qui est le torseur d'une liaison pivot glissant d'axe  $(C, \vec{z})$ .

11) On peut démontrer que l'association de deux liaisons pivot glissant d'axe  $(C, \vec{z})$  et d'axe  $(D, \vec{z})$  correspond à une liaison glissière de direction  $\vec{z}$ . En effet, les torseurs étant en parallèle on les égalise au point C. On déplace donc le torseur de la liaison pivot glissant définie en D au point C.  $\vec{V}(C) = \vec{V}(D) + \overrightarrow{CD} \wedge (\omega_{z2} \vec{z})$  soit  $\vec{V}(C) = v_{z2} \vec{z} + L\omega_{z1} \vec{x}$ . Ainsi, il vient que  $\omega_{z1} = \omega_{z2} = 0$ . Il reste donc uniquement les composantes de translation selon  $\vec{z}$ .

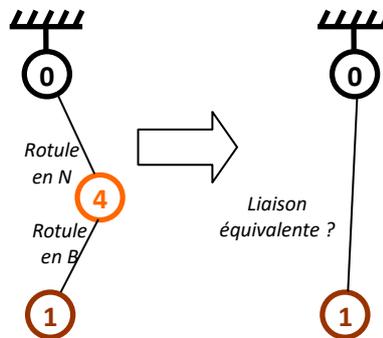
12) On souhaite avoir un bon guidage non seulement pour assurer la sécurité des personnes mais également pour éviter les frottements en descente et ralentir de manière non souhaitée la chute. On utilise ce type de guidage plutôt que des liaisons pivot glissant car ceci permet d'éviter les blocages en descentes (phénomène d'arc-boutement) et limiter également les frottements (roulement et non glissement). Par contre, il faut prévoir un système de réglage de position des galets pour être sûr qu'ils seront en contact avec les rails car beaucoup sont redondants.

**2 EXERCICE 2 : MAT REACTEUR A320**

Q.1.



Q.2. On est dans le cas de liaisons séries → on privilégie la méthode cinématique.



On a :  $\{C_{4/0}\} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{40}} & 0 \\ \Omega_{y_{40}} & 0 \\ \Omega_{z_{40}} & 0 \end{Bmatrix}_{N(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$  et  $\{C_{1/4}\} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{14}} & 0 \\ \Omega_{y_{14}} & 0 \\ \Omega_{z_{14}} & 0 \end{Bmatrix}_{B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$  et on pose :  $\{C_{eq}\} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{eq}} & v_{x_{eq}} \\ \Omega_{y_{eq}} & v_{y_{eq}} \\ \Omega_{z_{eq}} & v_{z_{eq}} \end{Bmatrix}_{N(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

$\vec{AM} = \vec{BN} = a \cdot \vec{z}$   
 $\rightarrow \vec{V}_{N,1/4} = \vec{V}_{B,1/4} + \vec{NB} \wedge \vec{\Omega}_{1/4} = -a \cdot \vec{z} \wedge (\Omega_{x_{14}} \cdot \vec{x} + \Omega_{y_{14}} \cdot \vec{y} + \Omega_{z_{14}} \cdot \vec{z}) = -a \cdot \Omega_{x_{14}} \cdot \vec{y} + a \cdot \Omega_{y_{14}} \cdot \vec{x}$

$\rightarrow \{C_{1/4}\} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{14}} & 0 \\ \Omega_{y_{14}} & 0 \\ \Omega_{z_{14}} & 0 \end{Bmatrix}_{B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{14}} & a \cdot \Omega_{y_{14}} \\ \Omega_{y_{14}} & -a \cdot \Omega_{x_{14}} \\ \Omega_{z_{14}} & 0 \end{Bmatrix}_{N(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

D'où  $\{C_{eq}\} = \{C_{1/0}\} = \{C_{1/4}\} + \{C_{4/0}\}$  d'où :

$$\begin{cases} \Omega_{x_{eq}} = \Omega_{x_{14}} + \Omega_{x_{40}} \\ \Omega_{y_{eq}} = \Omega_{y_{14}} + \Omega_{y_{40}} \\ \Omega_{z_{eq}} = \Omega_{z_{14}} + \Omega_{z_{40}} \\ v_{x_{eq}} = a \cdot \Omega_{y_{14}} \\ v_{y_{eq}} = -a \cdot \Omega_{x_{14}} \\ v_{z_{eq}} = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \{C_{eq}\} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{14}} + \Omega_{x_{40}} & a \cdot \Omega_{y_{14}} \\ \Omega_{y_{14}} + \Omega_{y_{40}} & -a \cdot \Omega_{x_{14}} \\ \Omega_{z_{14}} + \Omega_{z_{40}} & 0 \end{Bmatrix}_{N(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$  soit une liaison ponctuelle en N de normale  $(N, \vec{z})$ .

SI on veut faire par l'égalité des torseurs des actions transmissibles

$$\{F_{0 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} X_{04} & 0 \\ Y_{04} & 0 \\ Z_{04} & 0 \end{Bmatrix}_N ; \{F_{1 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} X_{14} & 0 \\ Y_{14} & 0 \\ Z_{14} & 0 \end{Bmatrix}_B ;$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN} = a \cdot \vec{z}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{M_{N,1/4}} = \overrightarrow{M_{B,1/4}} + \overrightarrow{NB} \wedge \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 4}} = -a \cdot \vec{z} \wedge (X_{14} \cdot \vec{x} + Y_{14} \cdot \vec{y} + Z_{14} \cdot \vec{z}) = -a \cdot X_{14} \cdot \vec{y} + a \cdot Y_{14} \cdot \vec{x}$$

Donc

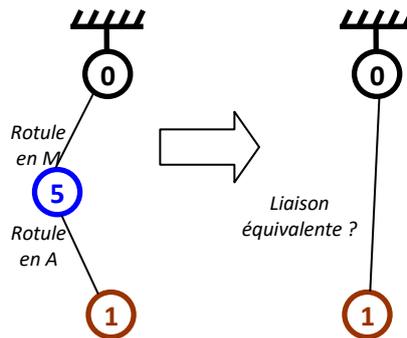
$$\{F_{eq}\} = \begin{Bmatrix} X_{04} & 0 \\ Y_{04} & 0 \\ Z_{04} & 0 \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} X_{14} & aY_{14} \\ Y_{14} & -aX_{14} \\ Z_{14} & 0 \end{Bmatrix}_N$$

Ce qui veut dire  $X_{14} = 0$  et comme  $X_{14} = X_{04}$   
 $Y_{14} = 0$  et comme  $Y_{14} = Y_{04}$

Le torseur équivalent vaut :

$$\{F_{eq}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{14} & 0 \end{Bmatrix}_N$$

Une liaison ponctuelle de normale (N,z)



$$\text{On a : } \{C_{5/0}\} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{50}} & 0 \\ \Omega_{y_{50}} & 0 \\ \Omega_{z_{50}} & 0 \end{Bmatrix}_{M(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{et } \{C_{1/5}\} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{15}} & 0 \\ \Omega_{y_{15}} & 0 \\ \Omega_{z_{15}} & 0 \end{Bmatrix}_{A(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{et on pose : } \{C_{eq}\} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{eq}} & v_{x_{eq}} \\ \Omega_{y_{eq}} & v_{y_{eq}} \\ \Omega_{z_{eq}} & v_{z_{eq}} \end{Bmatrix}_{M(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

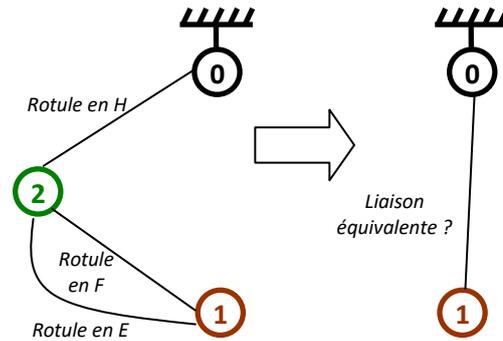
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN} = a \cdot \vec{z} \rightarrow \overrightarrow{V_{M,1/5}} = \overrightarrow{V_{A,1/5}} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/5}} = -a \cdot \vec{z} \wedge (\Omega_{x_{15}} \cdot \vec{x} + \Omega_{y_{15}} \cdot \vec{y} + \Omega_{z_{15}} \cdot \vec{z}) = -a \cdot \Omega_{x_{15}} \cdot \vec{y} + a \cdot \Omega_{y_{15}} \cdot \vec{x}$$

$$\rightarrow \{C_{1/5}\} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{15}} & 0 \\ \Omega_{y_{15}} & 0 \\ \Omega_{z_{15}} & 0 \end{Bmatrix}_{A(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{15}} & a \cdot \Omega_{y_{15}} \\ \Omega_{y_{15}} & -a \cdot \Omega_{x_{15}} \\ \Omega_{z_{15}} & 0 \end{Bmatrix}_{M(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\text{D'où } \{C_{eq}\} = \{C_{1/0}\} = \{C_{1/5}\} + \{C_{5/0}\} \text{ d'où : } \begin{cases} \Omega_{x_{eq}} = \Omega_{x_{15}} + \Omega_{x_{50}} \\ \Omega_{y_{eq}} = \Omega_{y_{15}} + \Omega_{y_{50}} \\ \Omega_{z_{eq}} = \Omega_{z_{15}} + \Omega_{z_{50}} \\ v_{x_{eq}} = a \cdot \Omega_{y_{15}} \\ v_{y_{eq}} = -a \cdot \Omega_{x_{15}} \\ v_{z_{eq}} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \{C_{eq}\} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \Omega_{x_{15}} + \Omega_{x_{50}} & a.\Omega_{y_{15}} \\ \Omega_{y_{15}} + \Omega_{y_{50}} & -a.\Omega_{x_{15}} \\ \Omega_{z_{15}} + \Omega_{z_{50}} & 0 \end{matrix} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix} \text{ soit une liaison ponctuelle en M de normale } (M, \vec{z}).$$

**Q.3.** Pour déterminer la liaison équivalente réalisée entre (1) et (0) par le triangle (2), il faut d'abord déterminer la liaison équivalente entre (1) et (2) (liaisons parallèles → utilisation de la méthode statique) puis déterminer la liaison équivalente entre (0) et (1) par (2) (liaisons séries → utilisation de la méthode cinématique).



$$\text{On a : } \left\{ F_{2 \rightarrow 1}^E \right\} = \begin{matrix} \left( \begin{matrix} X_{21}^E & 0 \\ Y_{21}^E & 0 \\ Z_{21}^E & 0 \end{matrix} \right)_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix} \quad \left\{ F_{2 \rightarrow 1}^F \right\} = \begin{matrix} \left( \begin{matrix} X_{21}^F & 0 \\ Y_{21}^F & 0 \\ Z_{21}^F & 0 \end{matrix} \right)_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix} \quad \text{et } \vec{EF} = e.\vec{y}$$

$$\left\{ F_{2 \rightarrow 1}^F \right\} = \begin{matrix} \left( \begin{matrix} X_{21}^F & 0 \\ Y_{21}^F & 0 \\ Z_{21}^F & 0 \end{matrix} \right)_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix} = \begin{matrix} \left( \begin{matrix} X_{21}^F & e.Z_{21}^F \\ Y_{21}^F & 0 \\ Z_{21}^F & e.X_{21}^F \end{matrix} \right)_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix} \quad \left\{ F_{2 \rightarrow 1}^E \right\} = \begin{matrix} \left( \begin{matrix} X_{21}^E & 0 \\ Y_{21}^E & 0 \\ Z_{21}^E & 0 \end{matrix} \right)_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix}$$

$$\text{On pose : } \left\{ F_{2 \rightarrow 1}^{eq} \right\} = \begin{matrix} \left( \begin{matrix} X_{21}^{eq} & L_{21}^{eq} \\ Y_{21}^{eq} & M_{21}^{eq} \\ Z_{21}^{eq} & N_{21}^{eq} \end{matrix} \right)_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix} \quad \text{et } \left\{ F_{2 \rightarrow 1}^{eq} \right\} = \left\{ F_{2 \rightarrow 1}^E \right\} + \left\{ F_{2 \rightarrow 1}^F \right\} \text{ d'où : } \begin{cases} X_{21}^{eq} = X_{21}^E + X_{21}^F \\ Y_{21}^{eq} = Y_{21}^E + Y_{21}^F \\ Z_{21}^{eq} = Z_{21}^E + Z_{21}^F \\ L_{21}^{eq} = e.Z_{21}^F \\ M_{21}^{eq} = 0 \\ N_{21}^{eq} = e.X_{21}^F \end{cases}$$

$$\rightarrow \left\{ F_{2 \rightarrow 1}^{eq} \right\} = \begin{matrix} \left( \begin{matrix} X_{21}^E + X_{21}^F & e.Z_{21}^F \\ Y_{21}^E + Y_{21}^F & 0 \\ Z_{21}^E + Z_{21}^F & e.X_{21}^F \end{matrix} \right)_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix} \text{ soit une liaison pivot d'axe } (E, \vec{y}).$$

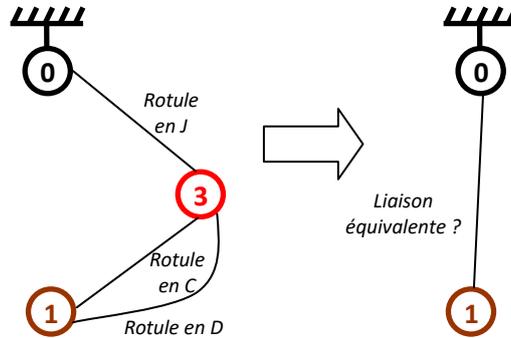
$$\text{On a : } \left\{ C_{2/0} \right\} = \begin{matrix} \left( \begin{matrix} \Omega_{x_{20}} & 0 \\ \Omega_{y_{20}} & 0 \\ \Omega_{z_{20}} & 0 \end{matrix} \right)_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix} \quad \text{et } \left\{ C_{1/2} \right\} = \begin{matrix} \left( \begin{matrix} 0 & 0 \\ \Omega_{y_{12}} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right)_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix} \quad \text{et on pose : } \left\{ C_{eq} \right\} = \begin{matrix} \left( \begin{matrix} \Omega_{x_{eq}} & v_{x_{eq}} \\ \Omega_{y_{eq}} & v_{y_{eq}} \\ \Omega_{z_{eq}} & v_{z_{eq}} \end{matrix} \right)_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix}$$

$$\vec{EH} = \frac{1}{2}.e.\vec{y} + h.\vec{z} \rightarrow \vec{V}_{H,1/2} = \vec{V}_{E,1/2} + \vec{HE} \wedge \vec{\Omega}_{1/2} = -\left(\frac{1}{2}.e.\vec{y} + h.\vec{z}\right) \wedge \Omega_{y_{12}}.\vec{y} = h.\Omega_{y_{12}}.\vec{x}$$

$$\rightarrow \left\{ C_{1/2} \right\} = \begin{matrix} \left( \begin{matrix} 0 & 0 \\ \Omega_{y_{12}} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right)_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix} = \begin{matrix} \left( \begin{matrix} 0 & h.\Omega_{y_{12}} \\ \Omega_{y_{12}} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right)_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix}$$

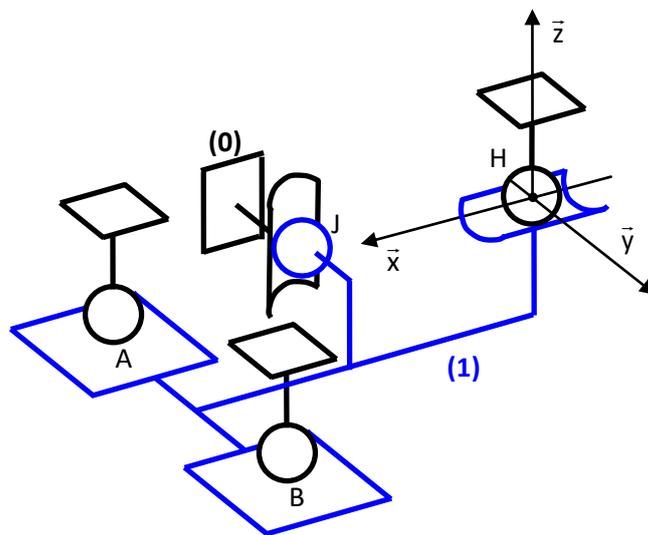
D'où  $\{C_{eq}\} = \{C_{1/0}\} = \{C_{1/2}\} + \{C_{2/0}\}$  d'où  $\{C_{eq}\} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{20}} & h.\Omega_{y_{20}} \\ \Omega_{y_{12}} + \Omega_{y_{20}} & 0 \\ \Omega_{z_{12}} & 0 \end{Bmatrix}_H$  soit une liaison linéaire

annulaire d'axe  $(H, \vec{x})$ .



En conduisant le même raisonnement que dans le cas de la liaison équivalente 0-2-1 on montre que la liaison équivalente est une liaison linéaire annulaire d'axe  $(J, \vec{z})$ .

Q.4.



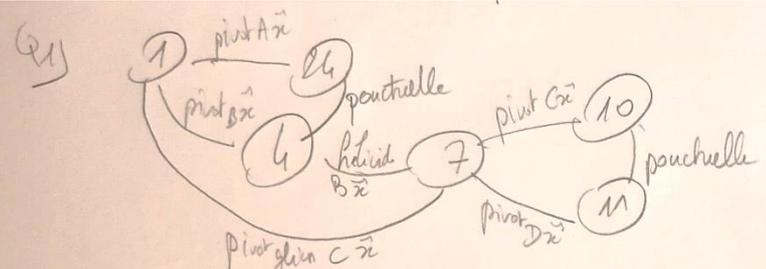
**3 EXERCICE 3 : SIMULATEUR DE VOL POUR LA FORMATION DE PILOTES EN AEROCLUB**

$p = \text{pivot d'axe } \vec{z}$   
 $h = I_s + m - 6(P_{\text{eq}} - 1)_{\text{Bats}}$   
 $(= m + 6\mu - I_c)$   
 $\Delta \quad L \rightarrow +1 \Rightarrow \mu = 11 - 9 + 1 = 3$   
 $I_s = 11 \times 5 \rightarrow h = 55 + 1 - 9 \times 6 = 8$   
 $I_c = 11 \times 1 \rightarrow h = 1 + 18 - 11 = 8$

**4 EXERCICE 4 : POUSSEUR DE TABLIER**

$M = 2$  utile (vieux)  
 Q1)  $h = 2 \times 4 + 2 \times 3 + 2 \times 5 + 2 - 6 \times 4 = 2$   
 (Pg vieux) (app) pivots  $m$   
 Q2) mettre une roulette à la place des pivots  $\Rightarrow$  2 degrés libérés par liaison  $\Rightarrow I_s = 4$  (L22)  
 Mais  $\Delta$  de mobilité interne (rotation capsobéni)  
 $\rightarrow m + 2$   
 $\Rightarrow h = 0!$   
 Q3) on rigidifie la liaison en enlevant de libertés  
 appui plan  $I_s = 3 \Rightarrow$  glissement  $I_s = 5 \Rightarrow$  l'hyperstatisme augmente  
 à 2  
 le blocage de la translation  $\perp$  plan est peut être important  
 donc on pourrait imaginer transformer le glissement en liaison coulissante  
 par ajout de mobilité. ( $I_s = 3$ )

**5 EXERCICE 5 : PLANEUR SOUS-MARIN**

Q1) 
 $m = 2$  (action de 11 et 2a)

Q2)  $h = I_s + m - 6(p-1) = 4 \times 5 + 4 + 2 \times 1 + 5 + 2 - 6 \times 5 = 3$   
 (pivots) (Pg) (pouchelle) (hélice)

les liaisons pivots présentent des blocages redondants  $\Rightarrow$  assemblage complexe!

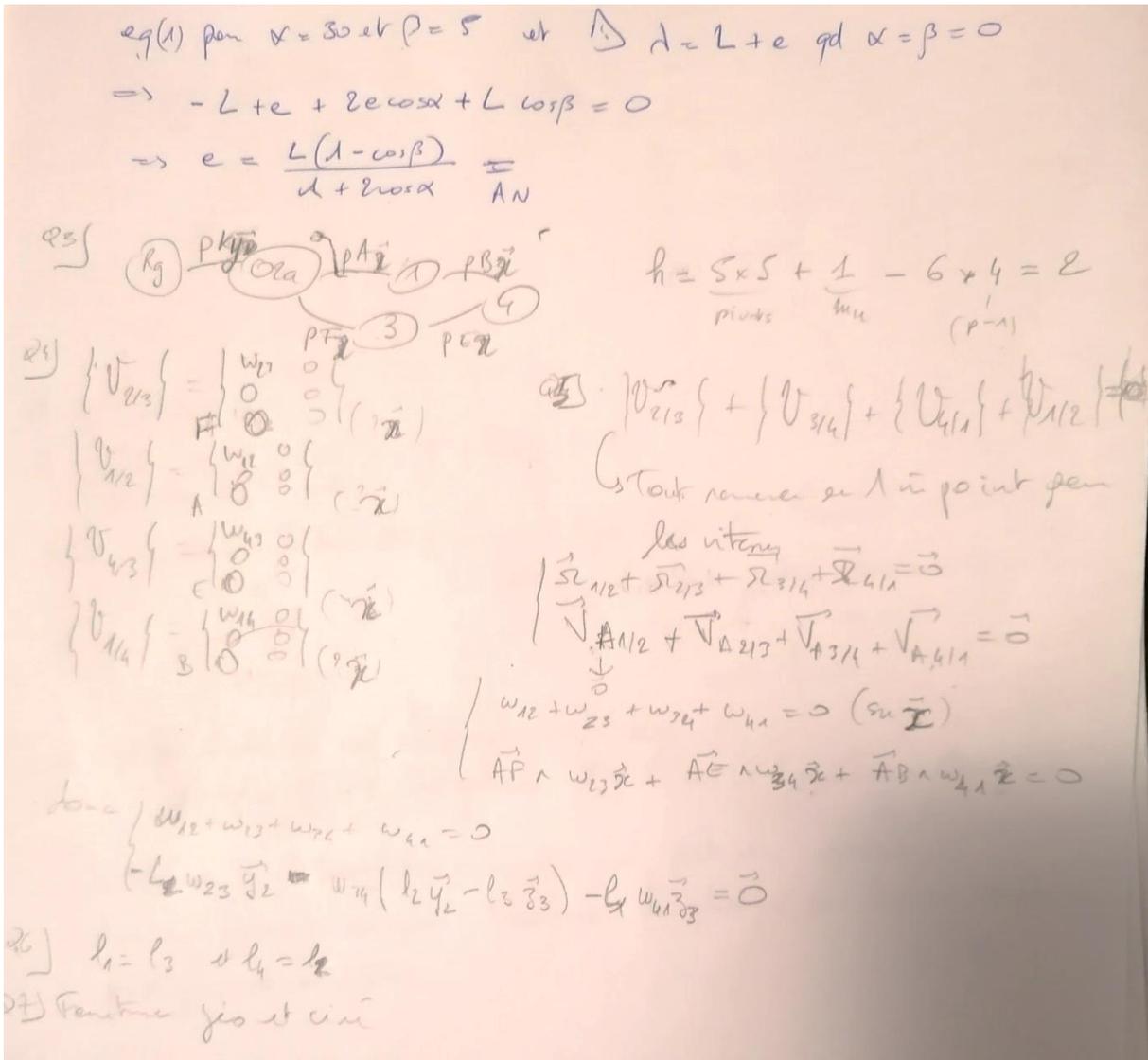
**6 EXERCICE 6 : SUSPENSION DE L'ADDBIKE**

Q1) Fonctionne geo:  $\vec{DH} + \vec{HJ} + \vec{JI} + \vec{IK} + \vec{KF} + \vec{FD} = \vec{0}$   
 $\begin{cases} \text{sur } \vec{y}_0: \cancel{L \sin \alpha} + 2e \cos \alpha + \frac{HS+IK}{\sin \gamma} + L \cos \beta = 0 \quad (1) \\ \text{sur } \vec{z}_0: L e \sin \alpha + \frac{HS+IK}{\sin \gamma} + L \sin \beta = 0 \quad (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{d - L \cos \beta}{2e}$   
 $(2) \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{L \sin \beta}{2e}$

$\Rightarrow (1)^2 + (2)^2 \Rightarrow 1 = \frac{(d - L \cos \beta)^2}{4e^2} + \frac{(L \sin \beta)^2}{4e^2}$

Q2) pour  $\alpha = 30$  et  $\beta = 5$  (1)  $\Rightarrow e = \frac{d - L \cos \beta}{2 \cos \alpha} =$



**7 EXERCICE 7 : MICRO MANIPULATEUR DE CHIRURGIE ENDOSCOPIQUE (MC<sup>2</sup>E)**

	Liaison linéaire annulaire	Liaison libre
$m_c =$	4	4
$h =$	$m - I_c + E_c = 4 - (4 + 4) + 6 = 2$	0 (Chaîne ouverte)
$h =$	$m - E_s + I_s = 4 - 24 + 22 = 2$	0 (Chaîne ouverte)
Efforts au point d'insertion*	Oui (à cause de l'hyperstatisme)	Non
Facilité de montage?*	Non (à cause de l'hyperstatisme)	Oui
Rigidité du robot*	Oui...	Oui...

\*: Remplir par oui ou non

**Correction**

Les 4 solides étant en série, on a  $\{V^{eq}(4/0)\} = \{V(4/3)\} + \{V(3/2)\} + \{V(2/1)\} + \{V(1/0)\}$ .  $O$  étant le point de concours de chacun des axes, les torseurs des liaisons pivots sont tous de la forme :  $\{V(i/i-1)\} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_i \vec{z}_i \\ 0 \end{pmatrix}_O$ . De plus,  $\{V(4/3)\} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \lambda \vec{z}_3 \end{pmatrix}_O$ .  
 Au final,  $\{V^{eq}(4/0)\} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 + \dot{\theta}_3 \vec{z}_3 \\ \lambda \vec{z}_3 \end{pmatrix}_O$ .  
 Il s'agit d'une liaison sphère-cylindre (linéaire annulaire) d'axe  $(O, \vec{z}_3)$ . En conséquences  $m_c = 4$ .

Les réponses données dans le tableau sont qualitative et critiquable... L'hyperstatisme impose des contraintes dans la fabrication l'assemblage du robot qui peuvent se traduire par des efforts à « vaincre » lors de l'assemblage ou de la mise en position du robot.

Un système hyperstatique est réputé plus rigide qu'un système isostatique. Cependant, lorsqu'un système est isostatique, sans jeu et avec des frottements, on peut aussi le considérer comme étant rigide...

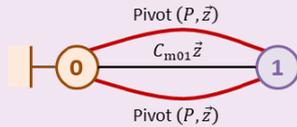
Q1

Q2

La structure du robot permet de satisfaire l'exigence 1.3 : « Ne pas endommager l'abdomen du patient ». En effet, le fait que les axes des 3 pivots s'intersectent en un point permet d'avoir un seul point d'entrée de la pince dans l'abdomen. Ainsi, on diminue les risques de « blesser » davantage le patient lors de l'opération de la vésicule.

Q3

**8 EXERCICE 8 : SYSTEME DE DEPOSE DE POUTRE**



**Méthode cinématique :**

- mobilité utile :  $m_u = 1$  ;
- mobilité interne :  $m_i = 0$  ;
- nombre de cycles :  $\gamma = 1$  ;
- nombre d'équations cinématiques :  $E_c = 6\gamma = 6$  ;
- nombres d'inconnues cinématiques :  $I_c = 2 \cdot 1 = 2$ .

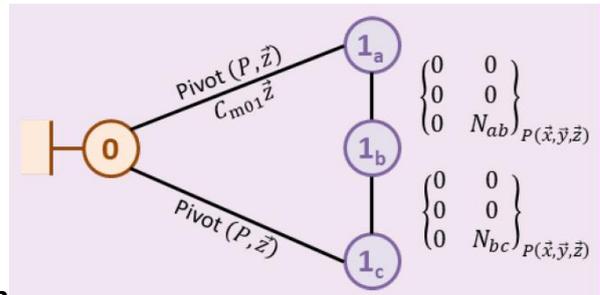
Au final :  $h = m - I_c + E_c = 1 - 2 + 6 = 5$ .

**Méthode statique**

- mobilité utile :  $m_u = 1$  ;
- mobilité interne :  $m_i = 0$  ;
- nombre d'équations cinématiques :  $E_s = 6(p - 1) = 6(2 - 1) = 6$  ;
- nombres d'inconnues cinématiques :  $I_s = 2 \cdot 5 = 10$ .

Au final :  $h = m - E_s + I_s = 1 - 6 + 10 = 5$ .

Q1



Q2

En réalisant une fermeture cinématique, on a  $\{\mathcal{V}(1_a/0)\} + \{\mathcal{V}(1_b/1_a)\} + \{\mathcal{V}(1_c/1_b)\} = \{\mathcal{V}(1_c/0)\}$ . Les torseurs étant considérés écrits au même point  $P$ , on a :

$$\begin{cases} p_{ba} + p_{cb} = 0 \\ q_{ba} + q_{cb} = 0 \\ r_{a0} = r_{c0} \end{cases} \quad \begin{cases} v_{xba} + v_{xcb} = 0 \\ v_{yba} + v_{ycb} = 0 \\ v_{zba} + v_{zcb} = 0 \end{cases} .$$

Il s'agit d'un système de rang 6 avec 12 inconnues. On a donc  $m = I_c - r_c = 12 - 6 = 6$ .

Q3

Q4. On a  $h = m - I_c + E_c = 6 - 12 + 6 = 0$ .

Q5. Le soufflet permet donc de rendre le système isostatique. Il est ainsi possible de monter le système sans avoir à imposer des contraintes géométriques sur le mécanisme.

**9 EXERCICE 9 : TUYERE A OUVERTURE VARIABLE**

En classe

**Q1**

**Q2**  $h = 3 \times 5 + 5 + 3 + 2 \times 1$  (I<sub>0</sub>) + 1 (P) (g) (r) (point) + (M<sub>20</sub>)  
 $- 6 \times (4)$   
 $\Rightarrow h = 2$  pas isostatique

**Q3** 2 liaisons en parallèles L<sub>3</sub> et L<sub>4</sub>  $\Rightarrow$  somme des torseurs des AIT par Leg

$L_3: \{F_{I_1}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vec{n}_1, \vec{m}_1, \vec{t}_1 \end{pmatrix}$

$L_4: \{F_{I_2}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vec{n}_2, \vec{m}_2, \vec{t}_2 \end{pmatrix}$

$\vec{\Pi}_{I_1} = \vec{\Pi}_{I_2} + \vec{T}_{I_1} I_2 \wedge N_2 \vec{m}_2$

$\vec{\Pi}_{I_1} = (I_1 0 + 0 I_2) \wedge N_1 \vec{n}_1$

$\vec{\Pi}_{I_1} = (-R \vec{n}_1 + R \vec{n}_2) \wedge N_2 \vec{n}_2$

$\vec{T}_{I_1} = -R N_2 \sin(2\alpha) \vec{x}_1$

donc  $\{F_{eq3}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_1 + N_2 \cos 2\alpha \\ N_2 \sin 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vec{n}_1, \vec{m}_1, \vec{t}_1 \end{pmatrix}$

Translations  $\vec{x}_1$ , Rotations  $\vec{m}_1$  et  $L_1$  Autourisées

$\Delta N_2 \vec{n}_2 = N_2 (\cos 2\alpha \vec{n}_1 + \sin 2\alpha \vec{t}_1)$

$\Rightarrow$  pas de liaisons normalisées!

**Q4** L<sub>1</sub> et L<sub>2</sub> en série  $\Rightarrow$  somme des torseurs cinématiques par Leg

$L_1: \{V_{I_2}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n}_1 \dots \end{pmatrix}$

$L_2: \{V_{I_3}\} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ q_{12} \\ r_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n}_1, \vec{t}_1, \vec{t}_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \{V_{eq}\} = \begin{pmatrix} p_{12} & u_{12} \\ q_{12} & 0 \\ r_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n}_1, \vec{t}_1, \vec{t}_2 \end{pmatrix}$

liaisons annulées d'axe (D  $\vec{n}_1$ )

**Q5** Leg<sub>12</sub> et Leg<sub>34</sub> en parallèle  $\Rightarrow$  somme des torseurs des AIT

donc  $\{F_{eq12}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_{12} \\ Z_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n}_1, \vec{t}_1, \vec{t}_2 \end{pmatrix}$

$$Lep_{12} : \begin{cases} 0 & 0 \\ y_{12} & 0 \\ z_{12} & 0 \end{cases} \begin{pmatrix} \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{M}_{I_1} = \vec{y}_1 \otimes \vec{D} + \vec{I} \otimes \vec{D} \wedge (y_{12} \vec{y}_1 + z_{12} \vec{z}_1)$$

$$= (\vec{I}_{10} + \vec{O} \otimes \vec{D}) \wedge (y_{12} \vec{y}_1 + z_{12} \vec{z}_1)$$

$$= -(\vec{D} \vec{n}_1 + a \vec{a} \vec{n}_1 + R \vec{y}_1) \wedge (y_{12} \vec{y}_1 + z_{12} \vec{z}_1)$$

$$= -y_{12} (\sin \alpha \vec{x}_1 + z_{12} \cos \alpha \vec{z}_1) \vec{z}_1 - a y_{12} \vec{z}_1 + a z_{12} \vec{y}_1 - R z_{12} \vec{x}_1$$

$$Lep_{3a} : \begin{cases} 0 & L_{13} \\ y_{13} & 0 \\ z_{13} & 0 \end{cases} \begin{pmatrix} \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

donc il reste de termes en moment au  $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$   
 en résultante au  $\vec{y}_1, \vec{z}_1$  et seule la résultante en  $\vec{x}_1$   
 est nulle  $\Rightarrow$  glissière  $\vec{x}_1$

le vein en D provoque un moment  
 important sur la glissière qui  
 risque de provoquer un arc-boutement en  $I_1$  et  $I_2$

**10 EXERCICE 10 : SYSTEME D'INSPECTION DE TUBE DE GUIDAGE**

En classe

Q1)

$$\{N_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_{12} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$\{N_{2/3}\} = \begin{Bmatrix} p_{23} & 0 \\ q_{23} & v_{23} \\ r_{23} & w_{23} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3 \end{pmatrix}$$

$$\{U_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_{31} & 0 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3 \end{pmatrix}$$

Q2) fermeture cinématique  

$$\{N_{1/2}\} + \{U_{2/3}\} + \{U_{3/1}\} = \{0\}$$

notations dans  $B_3$  : 
$$\begin{cases} 0 + p_{23} + 0 = 0 \\ 0 + q_{23} + 0 = 0 \\ 0 + r_{23} + x_{31} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{V}_{I,3/1} = \vec{V}_{A,3/1} + \vec{I} \wedge \vec{A} \vec{S}_{3/1} = (d \vec{x}_3 + y \vec{y}_3) \wedge x_{31} \vec{z}_3 = -d x_{31} \vec{y}_3 + y x_{31} \vec{x}_3$$

vitesses en I dans  $B_3$  : 
$$\begin{cases} v_{12} \sin \beta + 0 + y x_{31} = 0 \\ v_{12} \cos \beta + v_{23} - d x_{31} = 0 \\ w_{23} + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

Q3) on a 7 inconnues cinématiques avec le système suivant  $(I_c = 7)$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & \sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d & \cos\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{23} \\ q_{23} \\ r_{23} \\ r_{31} \\ v_{12} \\ v_{23} \\ w_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rang} = 6 = n_c$   
 $\text{mobilité} = 1$   
 $(I_c - n_c)$   
 $h = 6 + 1 - 7$   
 $h = 0$  (E-n<sub>c</sub>)  
 modèle isostatique

Q4) mobilité réelle (déclent translation  $\vec{y}_1$ )  $\Rightarrow \mu = 2$  et 5  $I_c$  en plus  
 $h = 12 + 0 - 12 = 0$   
 ça change rien !!

$$\left\{ \vec{T}_{3/2} \right\} = \begin{cases} p_{32} & 0 \\ q_{32} & v_{32} \\ r_{32} & w_{32} \end{cases} \left( \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z} \right)$$

Q5) 2 liaisons ponctuelles et parallèles  $\Rightarrow$  Somme des tourneurs de  $A_{11}$

$$\left\{ \vec{T}_{3/2} \right\} = \begin{cases} X_{32} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases} \left( \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z} \right) \quad \text{et} \quad \left\{ \vec{T}_{32} \right\} = \begin{cases} X_{32} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases} \left( \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z} \right)$$

$$\vec{T}_{I_{32}} = \vec{T}_J + \vec{T}_{32} \wedge X_{32} \vec{x}_3 = \vec{0} \quad \vec{T}_{I_{32}} = \vec{0}_I + \vec{T}_{32} \wedge X_{32} \vec{x}_3 = \vec{0}$$

(ou note  $R = I_{32} J = I_{32} I$ )

donc  $\left\{ \vec{T}_{32 \text{ eq}} \right\} = \begin{cases} X_{32} + X_{32} \cos(\beta + \beta') & 0 \\ X_{32} \sin(\beta + \beta') & 0 \\ 0 & 0 \end{cases} \left( \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z} \right)$

↑ Base

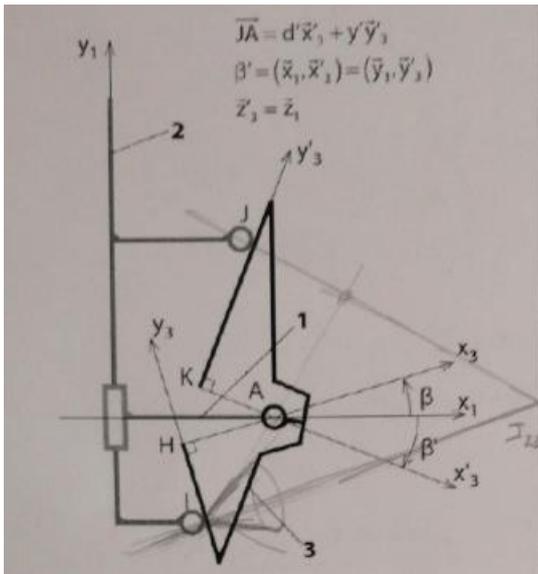
liaison linéaire annulée d'axe  $(I_{32} \vec{z})$

Q7)  $h = 6 + 1 - 6 = 1$  (idem) avec  $I_5 \Rightarrow h = 5 + 5 + 2 - 1 - 6 \cdot 2 = 1$

Q8) pour avoir une mobilité  $b = 0$

Q9) ça force tous les mouvements ?

Q11) le coef est faible, le direction de l'effort en I ne coupe pas en A, pas d'actonnement

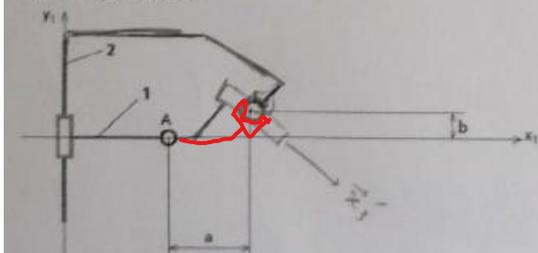


Objectif On cherche ici à montrer qu'il est impossible d'obtenir ce double contact avec la géométrie actuelle.

**Question 4** En vous appuyant sur les résultats précédents et en supposant que les angles  $\beta$  et  $\beta'$  sont différents de zéro, donner la valeur du degré de mobilité de ce modèle puis son degré d'hyperstatisme. Que concluez-vous de ces résultats? On notera  $\{Y\}^{(3/2)}$  le torseur cinématique de la liaison sphère-plan de centre J dont on précisera la normale.

**Question 5** En supposant que les normales, à préciser, aux liaisons sphère-plan, de centres I et J, sont concourantes au point que l'on notera  $I_{32}$ , déterminer, en utilisant l'équivalence statique, la liaison équivalente entre les solides 3 et 2 au point  $I_{32}$ .

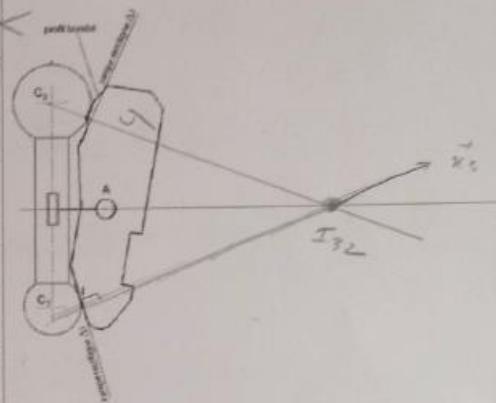
**Question 6** Compléter le schéma cinématique avec la liaison équivalente.



**Question 8** Indiquer à quelle condition sur  $a$  et  $b$  le degré de mobilité serait égal à 1. Commentez ce résultat en regard de l'objectif énoncé plus haut.

Les valeurs de  $a$  et  $b$  étant des fonctions du temps, on constate que la condition trouvée ne peut être vérifiée à chaque instant du mouvement d'accrochage conservant, sur la pièce 3, deux rampes rectilignes en contact ponctuels en I et J.

Une simulation informatique du mécanisme montre que si on décide de conserver la rampe rectiligne uniquement au contact en I, il est nécessaire d'avoir un profil bombé, donné sur la figure suivante, pour le contact J.



**Question 9** Expliquer et effectuer, le tracé permis de trouver exactement la position du point de contact entre la surface sphérique de la tige de commande et le fil bombé de la griffe, obtenu dans la position représentée.

**Question 10** Le bureau d'étude a finalement décidé de conserver les deux rampes rectilignes repérées  $\Delta 1$  et  $\Delta 2$  sur la figure. Quelle conséquence a ce choix sur le fonctionnement du mécanisme d'accrochage? Peut-on valider ce choix au critère étudié de la FT 2.1.1?

**Validation de la transmission de l'effort de commande**

On souhaite vérifier que le mouvement de commande de la griffe est toujours possible. Pour cela, on se place dans la configuration du modèle simplifié donné en Figure 5 de l'Annexe 4. On suppose que seule la liaison sphère-plan de centre I n'est pas parfaite avec un coefficient de frottement au contact  $f$  de 0,2. On suppose négligeable le poids de la griffe 3 devant les actions mécaniques