DS1 PCSI2
Durée 3h

Vendredi 23 septembre 2022

Le sujet est constitué de 5 exercices indépendants.
On veillera

1-à la rédaction des explications qui doivent être précises mais concises.
2-à la bonne présentation de la copie et en particulier à l'orthographe .
3-à mettre en évidence les résultats : les expressions littérales (homogénéité dimensionnelle à respecter) seront encadrées, ainsi que les résultats numériques (accompagnés d'unités).
4-Les questions devront être numérotées clairement et séparées les unes des autres.
5-Le sujet n'est pas à rendre avec la copie et doit être conservé par les étudiants.
6-Les circuits électriques doivent être reproduits obligatoirement sur la copie.

La non-observation de ces recommandations serait pénalisante.

EXERCICE 1 : Analyse dimensionnelle

Lorsqu'on place un lingot froid dans un four chaud, la vitesse à laquelle augmentera la température au centre va dépendre des facteurs géométriques (on notera l la longueur du lingot), de la conductibilité thermique k, et de l'inertie thermique dans laquelle interviennent la capacité thermique massique à pression constante c_P et la masse volumique ρ.
On note t la durée nécessaire pour atteindre une température donnée au centre du lingot. Cette durée doit dépendre des paramètres du système mentionnés ci-dessus. On pose donc :

$$t = A.c_p^a.\rho^b.k^c.l^d$$

où A est une constante sans dimension.

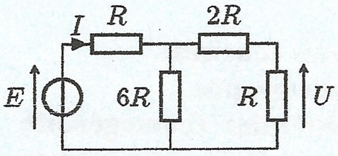
• par définition $c_p = \frac{1}{m}.\frac{dH}{dT}$
(en maintenant la pression constante), où H représente l'enthalpie (homogène à une énergie) du système de masse m et T la température;
• la « conductivité » thermique k lie le vecteur densité de flux thermique j (homogène à une puissance P par unité de surface) à la variation de température dans le milieu :

$$j = -k.\frac{dT}{dx}$$ (où x représente une coordonnée de position).

1. Rappeler la relation entre énergie et puissance, de façon à en déduire la dimension d'une puissance.
2. Etablir la dimension de la conductivité thermique k
3. Etablir la dimension de la capacité thermique massique à pression constante c_P
4. Déterminer les exposants de l'expression $t = A.c_p^a.\rho^b.k^c.l^d$ et en déduire sa forme finale.

EXERCICE 2 Calculs de courants et tension

On veut dans cet exercice calculer les courants I, I_1 parcourant la résistance 6R (à orienter sur le circuit), I_2 parcourant la résistance 2R (à orienter également) tels que $I+I_2=I_1$ ainsi que la tension U dans le circuit ci dessous par différentes méthodes et les comparer.



1-1ere méthode

a-Représenter le circuit à 1 maille parcouru par le courant I et déterminer son expression.

b-Appliquer alors le diviseur de courant pour déterminer les expressions de I_1 et I_2.

c-Vérifier alors la loi des nœuds.

d-Déterminer l'expression de U

2-2eme méthode

a-Déterminer l'expression de U en appliquant le diviseur de tension.

b- En déduire I_1 ,I_2. et I. Vérifier le bon accord avec la question1

3- 3eme méthode

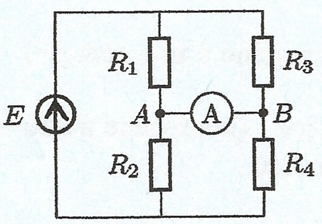
a-Déterminer la tension U_1 (à orienter sur le circuit) aux bornes de la résistance 6R ,en utilisant la loi des nœuds en termes de potentiels, en fonction de E et de R.

b- En déduire I_1 ,I_2. et I. Vérifier le bon accord avec les questions précédentes.

AN : Calculer les trois courants et la tension U lorsque E = 3 V et R = 1,5 k Ω.

EXERCICE 3 : Pont de Wheatstone. Mesure de température.

On considère le circuit ci-dessous appelé pont de Wheatstone qui permet de réaliser des mesures de résistances assez précises.



L'ampèremètre est modélisable par une résistance r . On dit que le pont est équilibré lorsque le courant traversant l'ampèremètre est nul.

1 - Etablir la relation entre les quatre résistances pour que le pont soit équilibré.

2- On suppose maintenant que la résistance R_1 est une thermistance dont valeur dépend de la température. On prendra :

$R_1(T) = R_0(1 + \alpha.\Delta T)$ où $\Delta T = T - T_0$, avec $T_0 = 0°C$, et $\alpha = 1.0.10^{-3}\ K^{-1}$.

On pose $x = \dfrac{R_4}{R_3}$

La valeur de R_0 est telle que le pont est équilibré pour $T = T_0$. En déduire une relation entre R_0, R_2, et x.

3 - On remplace l'ampèremètre par un voltmètre(considéré comme idéal) donc de résistance interne très grande devant les 4 résistances du montage,. Montrer que la tension $U=V_A-V_B$ (à représenter sur le schéma) qu'il mesure est donnée par la relation :

$$U = \frac{-\alpha.\Delta T.x}{(1+x)(1+x+\alpha.\Delta T)}.E$$

4 - On peut montrer que la valeur de x qui maximise la sensibilité du montage est x = 1.

a- Montrer qu'on peut alors négliger le terme $\alpha.\Delta T$ au dénominateur. Quelle est alors l'intérêt du montage ?

b- Donner alors la valeur de la température si on mesure U=-45mV pour une tension E=10V.

EXERCICE 4 : Point de fonctionnement et puissance d'une lampe de poche

La caractéristique tension-courant d'une lampe de poche est donnée sur l'annexe en fin d'énoncé qui est à rendre avec la copie.

Cette ampoule est alimentée par une pile de tension à vide E = 6,0 V et de résistance interne r=10Ω.

1 - Faire un schéma du circuit en indiquant la tension U et le courant I. Déterminer graphiquement le point de fonctionnement du circuit sur l'annexe (Explications à rédiger sur la copie).

On modélise maintenant l'ampoule comme une résistance R .

2 - Donner l'expression de la puissance dissipée par l'ampoule en fonction de r , R et E .

3 - On souhaite que cette puissance dissipée soit maximale (pour maximiser l'éclairage). Les caractéristiques de la pile sont fixées, mais on peut en revanche choisir l'ampoule à utiliser et donc la valeur de R.

Montrer qu'il existe une valeur de R qui maximise la puissance dissipée par l'ampoule.

4 - On conserve les valeurs précédentes. Pour un fonctionnement pendant une heure :

a-Quelle est l'énergie délivrée par la pile ?

b-Quelle est la charge débitée par la pile ?

EXERCICE 5 : supercondensateurs

L'utilisation d'un système de stockage d'énergie est souvent nécessaire pour les applications de type traction électrique. Le composant de stockage est utilisé :

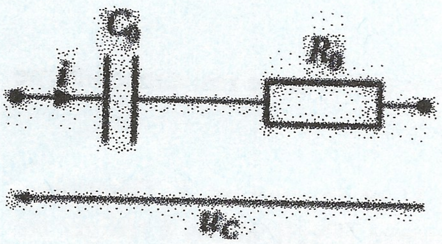
- dans les systèmes isolés où il alimente des dispositifs demandant une énergie réduite ;

- dans les systèmes hybrides où il joue un rôle en terme d'apport de puissance ou d'énergie selon l'application (par exemple phases de freinage ou d'accélération).

Jusqu'à présent, les systèmes les plus utilisés sont les accumulateurs, qui ont une puissance spécifique (puissance par unité de masse) et autonomie relativement élevées. Les condensateurs classiques ont une autonomie insuffisante, mais possède une puissance spécifique incomparable. Les supercondensateurs apparaissent comme des composants intermédiaires en terme de propriétés énergétiques, qui les rendent très intéressants car ils n'ont pratiquement pas de concurrents dans ce domaine.

Leur principe repose sur une augmentation de la capacité via l'utilisation d'électrodes poreuses aux surfaces très importantes, et situées à des distances très faibles (principe de la double couche électrochimique avec présence d'un électrolyte).
Leur comportement électrocinétique est plus complexe que celui des condensateurs classiques. Un modèle électrocinétique simple consiste à assimiler un supercondensateur à un condensateur de capacité C_0 associé en série à un conducteur ohmique de résistance R_0 (Selon le schéma ci dessous).

Ordre de grandeur de C_0 et R_0 : $C_0=3.10^3$ F $R_0 = 1{,}1\,\text{m}\Omega$



Modèle électrocinétique équivalent au supercondensateur

Dans les applications industrielles utilisant des supercondensateurs, ces derniers peuvent être associés en série ou en dérivation.

1-

a_ On associe deux supercondensateurs (C_0,R_0) identiques en série. Montrer que ce dipôle global est équivalent à l'association en série d'une capacité Cs et d'une résistance Rs dont on donnera les expressions en fonction de C_0 et R_0.

b- Généraliser ensuite ce résultat à une association en série de n supercondensateurs identiques.

2-

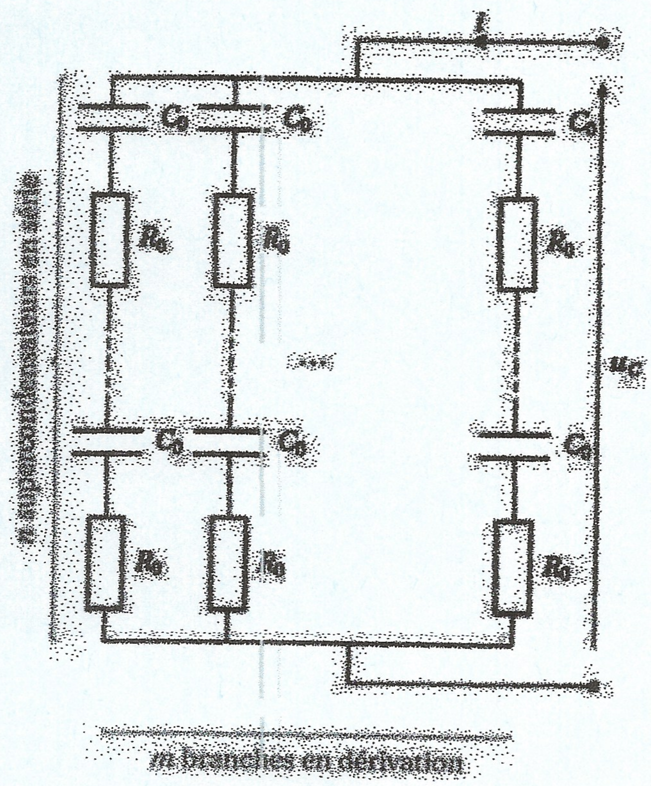
a- Montrer que pour un unique supercondensateur , la tension uc à laquelle il est soumis et le courant i qui le parcourt (convention recepteur) vérifient l'équation différentielle :

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C_0} + R_0 . \frac{di}{dt}$$

b- On associe maintenant deux supercondensateurs (C0,R0) identiques en dérivation. Montrer que ce dipôle global est équivalent à l'association en série d'une capacité Cd et d'une résistance Rd dont on donnera les expressions en fonction de C_0 et R_0.

c- Généraliser ensuite ce résultat à une association en dérivation de m supercondensateurs identiques.

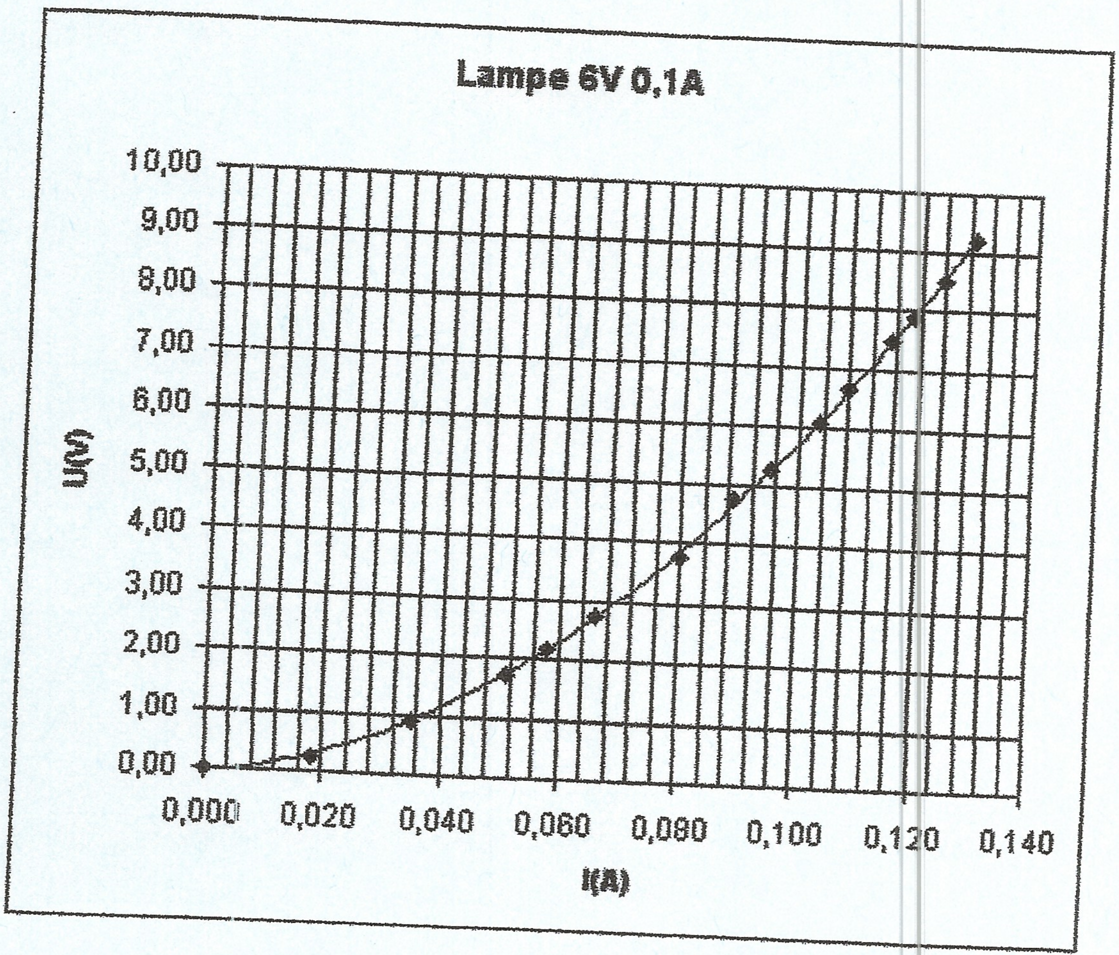
3- On envisage maintenant la matrice (n,m) de supercondensateurs (C_0,R_0) représentée ci dessous. En utilisant les résultats précédents, établir que le modèle électrocinétique équivalent à cette matrice est constitué d'une capacité Cn,m associée en série avec une résistance Rn,m, dont on donnera les expressions en fonction de C_0, R_0, de n et m.



Matrice de supercondensateurs

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

NOM



Correction DS 1. 22/23

23/09/2022.

1. Analyse dimensionnelle.

$$t = A \cdot c_p^a \rho^b k^c \ell^d$$

$$\begin{cases} \overset{\text{Température}}{[T]=\Theta} \qquad \overset{\text{Temps.}}{[t]=T} \\ A = \text{sans dimension} \qquad c_p = \dfrac{1}{m}\dfrac{dH}{dT} \\ \dfrac{P}{S} = -k\dfrac{dT}{dx} \qquad [\rho] = ML^{-3} \qquad [\ell] = L \end{cases}$$

• $P = \dfrac{dE}{dt} \Rightarrow [P] = [\text{Energie}].T^{-1}$ et $[\text{Energie}] = [\text{Travail}] = [F]\cdot L$

$\Rightarrow [\text{Energie}] = MLT^{-2}\cdot L = ML^2T^{-2} \Rightarrow \boxed{[P] = ML^2T^{-3}.}$

• $k = \dfrac{[P/S]}{\left[\dfrac{dT}{dx}\right]} = \dfrac{ML^2T^{-3}}{L^2\cdot[\Theta]\cdot L^{-1}} \rightarrow \boxed{[k] = MLT^{-3}\Theta^{-1}}$

• $[c_p] = \dfrac{1}{M}\cdot\dfrac{[\text{Energie}]}{\Theta} = \dfrac{ML^2T^{-2}}{M\cdot\Theta} = \boxed{L^2T^{-2}\Theta^{-1} = [c_p].}$

• $[t] = [c_p]^a \cdot [\rho]^b [k]^c [\ell]^d$

$T = (L^2T^{-2}\Theta^{-1})^a \cdot (ML^{-3})^b \cdot (MLT^{-3}\Theta^{-1})^c \cdot L^d$

$T = L^{2a-3b+c+d}\; T^{-2a-3c}\; \Theta^{-a-c}\; M^{b+c}$

$\rightarrow$
(1) $0 = b+c \Rightarrow b = -c$
(2) $0 = 2a-3b+c+d$
(3) $1 = -2a-3c$
(4) $0 = -a-c \Rightarrow a = -c$

en écrivant $+2c-3c = 1 \Rightarrow -c = 1 \Rightarrow \boxed{c=-1}$ et $\boxed{a=1}$

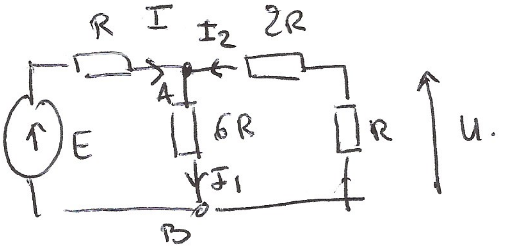
donne $b=-c \Rightarrow \boxed{b = 1.}$

donne alors d : $0 = \underbrace{2-3-1}_{-2} + d \Rightarrow \boxed{d = 2.}$

La formule s'écrit alors $\boxed{t = \dfrac{A\cdot\rho\cdot c_p\,\ell^2}{k}}$

Ex 2

$I + I_2 = I_1$ impose l'orientation de I_1 et I_2

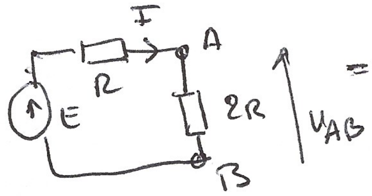


Circuit (1)

1°] a) 1ère méthode   entre A et B ; I_2 parcourt R et 2R qui sont donc en série
6R parcourue par I_1 et 3R parcourue par I_2 sont donc en //.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6R} + \frac{1}{3R} = \frac{3}{6R} \Rightarrow \boxed{R_{eq} = 2R}$$

Circuit (2)



$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{E}{3R}}$$

b) Diviseur de courant.

$$\frac{I_1}{I} = \oplus\frac{2R}{6R} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{E}{9R}}$$

(entre A et B I parcourt 2R en conv. récepteur
I_1 parcourt 6R en conv. récep)

$$\frac{I_2}{I} = \ominus\frac{2R}{3R} \Rightarrow \boxed{I_2 = -\frac{2}{3}I} \boxed{= -\frac{2E}{9R}}$$

c) Vérification loi des nœuds.
$I + I_2 = I - \frac{2}{3}I = \frac{I}{3}$ qui est bien égal à I_1.

d) $U = -RI_2 = \boxed{+\frac{2}{9}E = U}$ loi d'ohm en conv. générateur.

2- 2ème méthode.

a) $U = \frac{R}{3R}U_{AB}$ ds le circuit (1)   et ds le circuit (2) $U_{AB} = \frac{2R}{3R}.E = \frac{2}{3}E$

$= \frac{U_{AB}}{3}$

d'où $\boxed{U = \frac{2}{9}E.}$ On retrouve le résultat précédent.

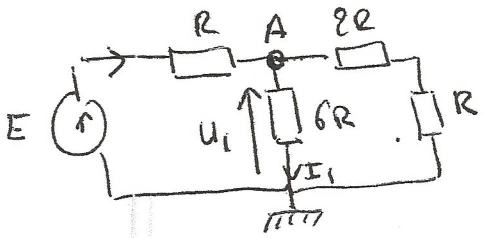
b) d'où $I_2 = -\frac{U}{R} = \boxed{-\frac{2}{9}\frac{E}{R} = I_2}$ $\boxed{I_1 = \frac{U_{AB}}{6R} = \frac{E}{9R}}$ et $I = I_1 - I_2$

$= \frac{E}{9R} + \frac{2}{9}\frac{E}{3}$

$\boxed{= \frac{3}{9}\frac{E}{R} = \frac{E}{3R}}$! $= I$

$3^{ème}$ méthode

a- Pour alléger les calculs a fixe un pot de masse n. ds le circuit



$U_1 = V_A - V_M$, $V_M = 0$

$$V_A = \frac{\frac{E}{R} + 0 + 0}{\frac{1}{R} + \frac{1}{6R} + \frac{1}{3R}} = \frac{E}{\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)} = \frac{6 \cdot E}{6+1+2} = \frac{6E}{9} = \boxed{\frac{2E}{3} = V_A} = U_1$$

d'où $J_1 = \frac{U_1}{6R} = \frac{2E}{18R} = \boxed{\frac{E}{9R} = J_1}$ et $\boxed{J_2 = -\frac{U_1}{3R} = -\frac{2}{9}\frac{E}{R}}$

AN $J = \frac{E}{3R} = \frac{3}{3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-3}\,A \Rightarrow \boxed{I = 0{,}66\,mA}$

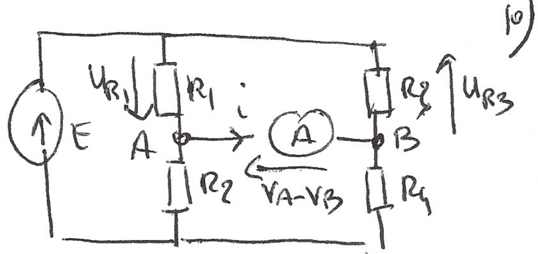
$J_1 = \frac{E}{9R} = \frac{J}{3} = \boxed{0{,}22\,mA = J_1}$

$\boxed{J_2 = 0{,}44\,mA}$

$U = \frac{2}{9} \cdot E$

$= \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \boxed{0{,}66\,V = U}$

Ex 3 Pont de wheatstone.



1°) $V_A - V_B = r \cdot i$

lorsque le pont est équilibré $i = 0$

$\Rightarrow V_A - V_B = 0$

on $V_A - V_B = U_{R_1} + U_{R_3}$ et $U_{R_1} = -\dfrac{R_1}{R_1+R_2} \cdot E$ et $U_{R_3} = \dfrac{R_3}{R_3+R_4} \cdot E$.

d'où $\left(-\dfrac{R_1}{R_1+R_2} + \dfrac{R_3}{R_3+R_4}\right) \cdot E = 0 \Rightarrow \boxed{R_1 R_4 = R_2 R_3}$

2°) $R_1(T) = R_0(1+\alpha \Delta T)$ et $x = \dfrac{R_4}{R_3}$

Pont équilibré pour $R_1 = R_0$ $(\Delta T = 0)$ $\Rightarrow R_0 = \dfrac{R_2}{R_4} \cdot R_3 \Rightarrow \boxed{R_0 = \dfrac{R_2}{x}}$

Le voltmètre prélève un courant quasi-nul

donc on a tjs $V_A - V_B = U_{R_1} + U_{R_3} = \left(\dfrac{R_3}{R_3+R_4} - \dfrac{R_1}{R_1+R_2}\right) E$

$$U = V_A - V_B = \frac{R_3 R_2 - R_1 R_4}{(R_3+R_4)(R_1+R_2)} \cdot E.$$

$$= \frac{R_3\left(R_2 - \frac{R_2}{x}(1+\alpha\Delta T)\cdot \frac{R_4}{R_3}\right)\cdot E}{R_3\left(1+\frac{R_4}{R_3}\right)(R_1+R_2)} = \frac{R_2\left(1-(1+\alpha\Delta T)\right)\cdot E}{R_2(1+x)\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)} = \frac{-\alpha\Delta T \cdot E}{(1+x)\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}$$

or $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{1}{x}(1+\alpha\Delta T)$ d'où $1 + \dfrac{R_1}{R_2} = 1 + \dfrac{1}{x}(1+\alpha\Delta T) = \dfrac{1+x+\alpha\Delta T}{x}$.

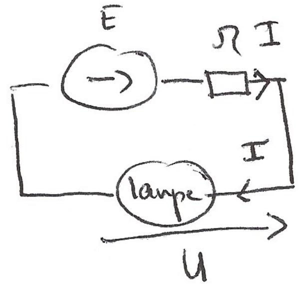
d'où $$\boxed{U = V_A - V_B = \frac{-\alpha \Delta T \cdot x \cdot E}{(1+\alpha\Delta T + x)(1+x)}.}$$

4] $x \simeq 1$. $\alpha = 10^{-3} \Rightarrow \alpha \Delta T \ll x. \Rightarrow \boxed{U = -\dfrac{\alpha \cdot x \cdot E}{(1+x)^2} \cdot \Delta T}$

U proportionnel à ΔT.

Pour $x = 1$ $\boxed{\Delta T = \dfrac{-4U}{\alpha E}}$ AN $\Delta T = 18°C$

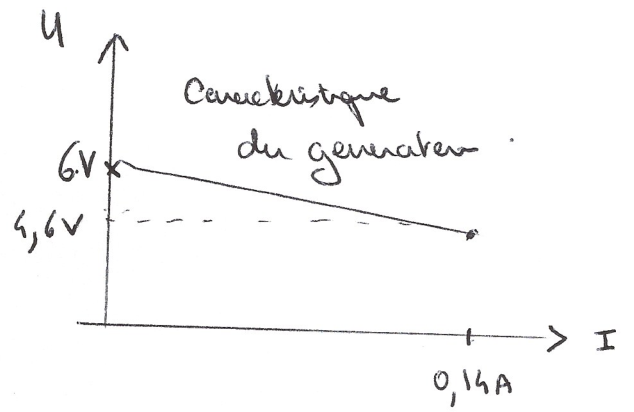
ex 4

1) 

$U = E - rI$ aux bornes du générateur.

donc $U_0 = E = 6V$ (point d'intersection avec l'axe des ordonnées de la caractéristique)

et pente $= -r = -10\Omega$.



pour $\Delta I = 0,14A$.

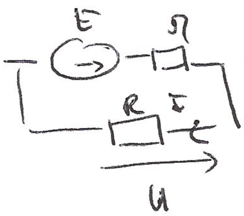
$\Delta U = -1,4V$.

Le point de fonctionnement est le point d'intersection des 2 caractéristiques (voir annexe). $\boxed{I = 0,086A. \quad U = 5V.}$

2) $P = U \cdot I$

$= RI^2$

$$\boxed{P = \frac{R}{(R+r)^2} \cdot E^2}$$



$I = \frac{E}{r+R}$.

3] $P(R)$ est max pour $\frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow d\left[\frac{R}{(R+r)^2}\right] / dR = 0$

or $\frac{d}{dR}\left[\frac{R}{(R+r)^2}\right] = \frac{1}{(R+r)^2} - \frac{2R}{(R+r)^3} = \frac{R+r-2R}{(R+r)^3} = \frac{r-R}{(R+r)^2} = 0$ pour $R = r$.

et $P_{max} = \frac{r}{(2r)^2} \cdot E^2 = \boxed{\frac{E^2}{4r} = P_{max}.}$

4] Pendant un intervalle de temps Δt ; la pile délivre l'énergie $\boxed{\mathcal{E} = P\Delta t}$

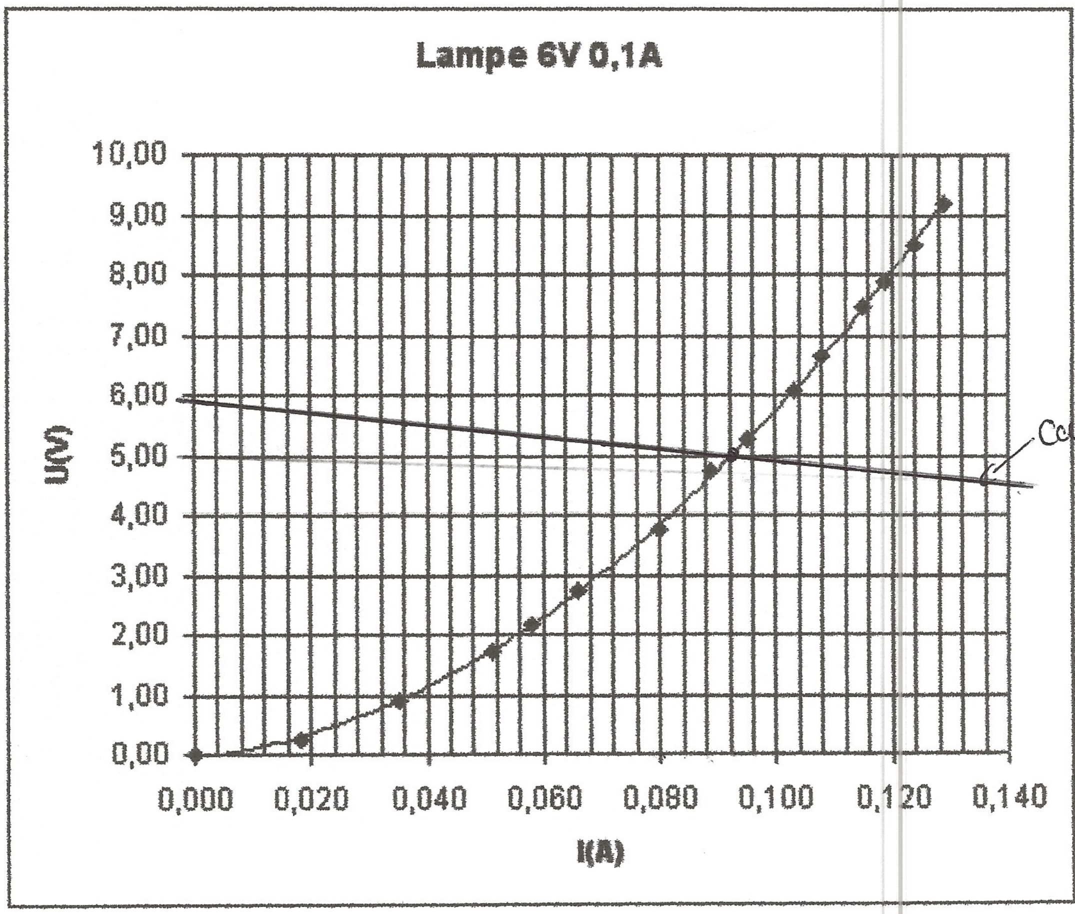
AN $\boxed{\mathcal{E} = \frac{36}{4 \times 10} \cdot 3600 = 3240 J}$

$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \rightarrow \boxed{\Delta Q = i\Delta t}$

AN $Q = \frac{60}{20} \cdot 3600 = 0,3 \cdot 3600 = \boxed{1080C = Q.}$

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

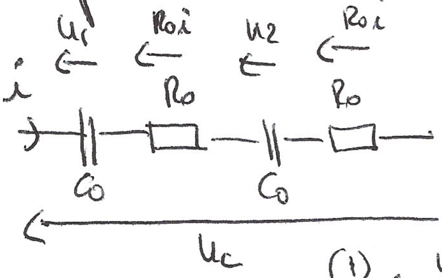
NOM



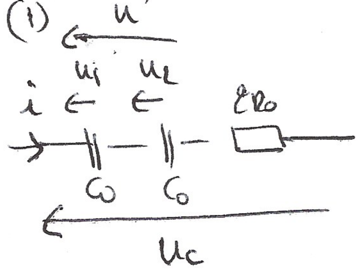
caractéristique du générateur.

Ex 5 Supercondensateurs

1] a-



$u_c = u_1 + u_2 + 2R_0 i$ donc (1)



est equivalent à

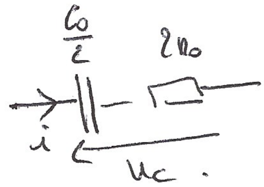
et $i = C_0 \dfrac{du_1}{dt} = C_0 \dfrac{du_2}{dt}$

et $u' = \cancel{u_1} + u_2$

donc $\dfrac{du'}{dt} = \dfrac{du_1}{dt} + \dfrac{du_2}{dt}$

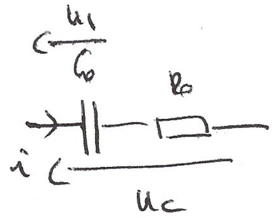
$= \dfrac{2i}{C_0} = \dfrac{1}{C_{eq}} i$

d'où (1) est equivalent à



b) Generalisation. $C_{eq} = \dfrac{C_0}{n}$ $R_{eq} = n R_0$.

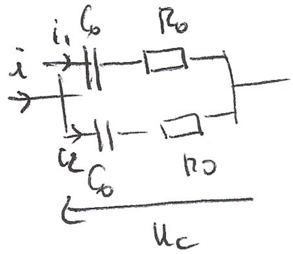
2 a]



$$\begin{cases} u_c = u_1 + R_0 i & (1) \\ i = C_0 \dfrac{du_1}{dt} & (2) \end{cases}$$

en derivant (1) $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{i}{C_0} + R_0 \dfrac{di}{dt}}$.

b]



$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ \dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{i_1}{C_0} + R_0 \dfrac{di_1}{dt} = \dfrac{i_2}{C_0} + R_0 \dfrac{di_2}{dt}. \end{cases}$$

d'où $2\dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{i_1 + i_2}{C_0} + R_0 \left(\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{di_2}{dt} \right) \Rightarrow \dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{i}{2C_0} + \dfrac{R_0}{2} \dfrac{di}{dt}$.

$\Rightarrow \begin{cases} C_{eq} = 2C_0 \\ R_{eq} = R_0/2. \end{cases}$ Generalisation $\boxed{\begin{array}{l} C_{eq} = m C_0 \\ R_{eq} = R_0/m. \end{array}}$

Association en serie $C_{eq_1} = \dfrac{C_0}{n}$ $R_{eq_1} = n C_0$.

Association de m C_{eq_1} et m R_{eq_1} en // $\Rightarrow$ $C_{eq} = \dfrac{m}{n} C_0$ $R_{eq} = \dfrac{n}{m} C_0$.