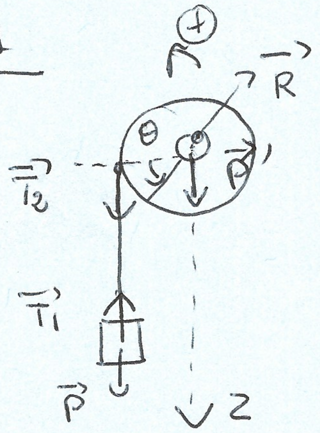
Correction DS 7 07/04/2023.

Partie 1

Ex1.



1) Fil sans masse $\Rightarrow$ $\|\overrightarrow{T_1}\| = \|\overrightarrow{T_2}\|$.

Sur $S_1 = m$ $\begin{cases} \overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{e_z} \\ \overrightarrow{T_1} = -T_1 \overrightarrow{e_z} \end{cases}$

Sur $S_1 + S_2$ $\begin{cases} \overrightarrow{R} : \text{réaction de l'axe} \\ \overrightarrow{P'} = \text{Poids du cylindre.} \\ \overrightarrow{T_2} : \text{tension du fil.} \\ \text{Couple de force dont le moment est } \Gamma_\Delta = -\lambda\omega \end{cases}$

2°) Tous les points du fil ont la même vitesse :

Ceux sur la partie enroulée ont une vitesse $R\dot{\theta}$

Ceux sur la partie verticale " " " $\dot{z}$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\dot{z} = R\dot{\theta}}$

3°] TMC appliqué à S_2 :

$J_\Delta \cdot \ddot{\theta} = \underbrace{\mathcal{M}_\Delta(\vec{P'})}_{=0} + \underbrace{\mathcal{M}_\Delta(\vec{R})}_{=0} + \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{T_2}) - \lambda\omega = \|\overrightarrow{T_2}\| \cdot R - \lambda\omega$ (1)

Calcul de $\|\overrightarrow{T_2}\|$: On applique le TCI à S_1 projeté suivant $\overrightarrow{e_z}$: $m\ddot{z} = mg - T_1$ $\Rightarrow$ $T_1 = mg - m\ddot{z} = \|\overrightarrow{T_2}\|$

L'équation (1) devient : $J_\Delta \ddot{\theta} = m(g-\ddot{z}) \cdot R - \lambda\dot{\theta}$

$J_\Delta \ddot{\theta} = m(g - R\ddot{\theta}) \cdot R - \lambda\dot{\theta}$.

$(J_\Delta + mR^2)\ddot{\theta} = mgR - \lambda\dot{\theta}$

Eq. diff vérifiée par $\omega = \dot{\theta}$: $(J_\Delta + mR^2)\dot{\omega} + \lambda\omega = mgR$.

$$\boxed{\dot{\omega} + \frac{\lambda}{J_\Delta + mR^2}\,\omega = \frac{mgR}{J_\Delta + mR^2}} \qquad \tau = \frac{J_\Delta + mR^2}{\lambda}$$

$\omega(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + S_p$ $\qquad$ $S_p = \frac{mgR}{\lambda}$

$t > 10\tau \Rightarrow \omega \to S_p = \frac{mgR}{\lambda} = cste$ le dispositif permet de régler la vitesse de rotation du cylindre.

4°] On peut retrouver cette équation différentielle en appliquant le TMC à $S_1 + S_2$:

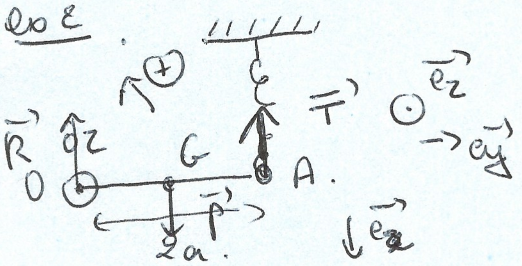
$\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ deviennent des forces internes. et le moment d'inertie de (S_1+S_2) s'écrit $J_\Delta + mR^2$. d'où

bras de levier

$$(J_\Delta + mR^2)\ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) \cancel{-\lambda\omega} + mg\overset{\llcorner}{R} - \lambda\omega$$

Rq $J_{total} = J_\Delta + m(\vec{OP}\wedge\vec{mv})\cdot\vec{e_x} = J_\Delta + m\underbrace{[(R\vec{e_y}+z\vec{e_z})\wedge\dot{z}\vec{e_z}]\cdot\vec{e_x}}_{mR\dot{z}\vec{e_x}\cdot\vec{e_x}} = mR^2\dot{\theta}$

Ex 2.



Système S = barre soumise à

- $\vec{P} = m\vec{g}$ appliqué en G avec OG = a (barre homogène)
- $\vec{T} = -k(\ell-\ell_0)\vec{e_z}$ appliqué en A
- $\vec{R}$ = réaction de l'axe de moment nulle.

$\Rightarrow \mathcal{M}_z(\vec{R}) = 0$ (pas de frottement)

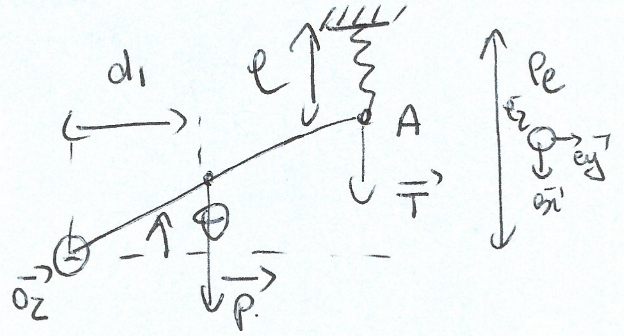
A l'éq $\quad \vec{T} + \vec{P} + \vec{R} = 0$

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) + \underbrace{\mathcal{M}_z(\vec{R})}_{0} + \mathcal{M}_z(\vec{T}) = 0.$$

$$-mga + (+k(\ell_{eq}-\ell_0))\cdot 2a = 0 \to -mga + k(\ell_{eq}-\ell_0)2a = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}}$$

Rq $\ell_{eq} > \ell_0 \Rightarrow$ donc $\vec{T}$ fait tourner la barre ds le sens (+).



$\ell = \ell_e - 2a\sin\theta$

$\theta > 0 \quad \sin\theta > 0 \Rightarrow \ell < \ell_e$.

$\theta < 0 \quad \sin\theta < 0 \Rightarrow \ell > \ell_e$.

$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mg\underbrace{a\cos\theta}_{d_1}$.

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = (\vec{OA} \wedge \vec{T}) \cdot \vec{e_z}$

$$\left.\begin{aligned}\vec{OA} &= 2a\cos\theta\,\vec{e_y} - 2a\sin\theta\,\vec{e_x}\\ \vec{T} &= -k(\ell-\ell_0)\,\vec{e_x}\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}\vec{OA}\wedge\vec{T} &= \left(-2a\sin\theta\,\vec{e_x} + 2a\cos\theta\,\vec{e_y}\right)\wedge\left(-k(\ell-\ell_0)\,\vec{e_x}\right)\\ &= -k(\ell-\ell_0)\cdot 2a\cos\theta\,(-\vec{e_z})\\ &= +k(\ell-\ell_0)\,2a\cos\theta\,\vec{e_z}.\end{aligned}$$

d'où $\quad J_z.\ddot\theta = -mga\cos\theta + k(\ell_e - 2a\sin\theta - \ell_0)\,2a\cos\theta$.

$$= \underbrace{\left[-mga + 2k(\ell_e-\ell_0)\right]}_{\substack{\shortparallel\\ 0}}\cos\theta - 2ak\sin\theta\cdot 2a\cos\theta.$$

(condition d'eq).

$$\boxed{J_z.\ddot\theta + 4a^2k\sin\theta\cos\theta = 0}$$

4°] Méthode énergétique $\quad dE_c(\text{Barre}) = \delta W_{\vec{P}} + \delta W_{\vec{T}} = -dE_p$.

d'où $\quad E_c + E_p = \text{cste} \quad$ avec $\quad E_c = \frac{1}{2}J_z.\dot\theta^2$.

$E_p = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2 + mga\sin\theta$

$E_p = \frac{1}{2}k(\ell_e - 2a\sin\theta - \ell_0)^2 + mga\sin\theta$.

$$\frac{d(E_c+E_p)}{dt} = J_z\cancel{\dot\theta}\ddot\theta + k\left[-2a\cancel{\dot\theta}\cos\theta\right](\ell_e - 2a\sin\theta - \ell_0) + mga\cancel{\dot\theta}\cos\theta = 0$$

$$J_z.\ddot\theta + \underbrace{\left[mga - 2ak(\ell_e-\ell_0)\right]}_{\substack{\shortparallel\\ 0}}\cos\theta + 4a^2k\cos\theta\sin\theta = 0.$$

(CE)

5°]

$\theta \to 0 \quad \cos\theta \to 1$
$\quad\sin\theta \to \theta \quad$ et $J_z = \frac{4}{3}ma^2 \to$

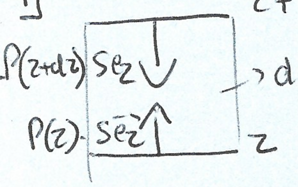
On obtient : $\quad \boxed{\ddot\theta + \frac{3k}{m}\theta = 0} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}}$

$\theta = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Partie 2.

Ex 1.

1]



$d\tau = S\,dz$ de fluide est soumis à

$$\underbrace{[+P(z).S - P(z+dz).S]\vec{e_z}}_{\text{forces de pression exercée par le fluide extérieur}} \underbrace{- \mu g_0 S\,dz\,\vec{e_z}}_{\text{Poids de } d\tau} = 0$$

$$P(z) - P(z+dz) = P(z) - \left[P(z) + \frac{dP}{dz}\cdot dz\right] = -\frac{dP}{dz}\cdot dz.$$

d'où $\boxed{dP = -\mu g_0 \cdot dz}$

2.1] $PV = nRT = \frac{m}{M}RT \rightarrow \mu = \frac{m}{V} = \frac{P.M}{RT}$ et $T = T_0$.

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PMg}{RT_0} \Rightarrow \frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT_0}P = 0 \Rightarrow P = Ae^{-\frac{z}{h}} \quad \text{et } h = \frac{RT_0}{Mg}.$$

à $z=0$ $P = P_0 \rightarrow \boxed{P = P_0 e^{-\frac{z}{h}}}$.

2.2]. $P(h) = P_0 e^{-1} = \frac{P_0}{e}$ AN $h = 8{,}3$ km. $T_0 = 288$ K.

2.3] $P(10\text{ km}) = 0{,}30$ bar.

1.3] $T(z) = T_0(1-az)$ $a = 0{,}0226\text{ km}^{-1}$.

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PM\cdot g}{RT_0(1-az)} \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0}\cdot\frac{dz}{1-az} = -\frac{1}{h}\frac{dz}{(1-az)}$$

$$\ln P = +\frac{1}{ah}\ln(1-az) + \text{cste}.$$

$\ln P_0 = 0 + \text{cste} \rightarrow \ln P - \ln P_0 = \frac{1}{ah}\ln(1-az).$

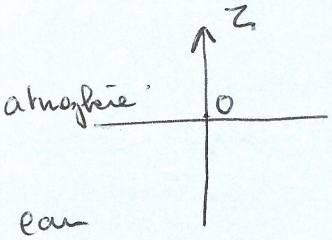
$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \ln(1-az)^{\frac{1}{ah}} \rightarrow \boxed{P = P_0(1-az)^{\frac{1}{ah}}}$$

1.3.2] $P(10\text{ km}) = 0{,}25$ bar -

1-4] $\frac{1}{ah} = 5{,}36 \simeq \beta = 5{,}26$.

$P(z = 10\,km) = 0{,}26$ bar.

<u>Ex 2</u> <u>Plongée</u>.

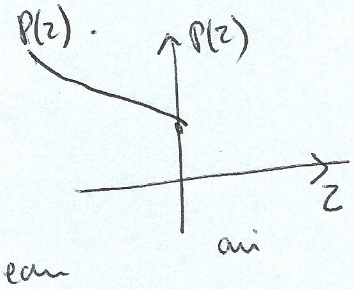


1°) $\frac{dP}{dz} = -\rho g$. et $\rho = cste$.

$P(z) = -\rho g z + cste$.

à $z = 0$ $P(z) = P_0$ car la surface libre est en éq.

$\Rightarrow \boxed{P(z) = -\rho g z + P_0.}$



2°) $T = cste$ + GP $\Rightarrow PV = cste$.

$P(z) \cdot V(z) = P_0 \cdot V_1$. $\Rightarrow$

$V(z) = \frac{P_0 V_1}{P(z)} = \frac{P_0 \cdot V_1}{P_0 - \rho g z} \searrow$ avec z car $P(z) \uparrow$.

<u>AN</u> $\boxed{V(z = -10\,m) = 3{,}6 \cdot 10^{-3}\,m^3}$ $\Rightarrow \vec{F_{arch}} \searrow$ avec z.

3°] $\vec{Pa_{ll}} = (mg - \|\vec{F_{arch}}\|)(-\vec{e_z}) = (\underbrace{\|\vec{F_{arch}}\| - mg}_{>0})\,\vec{e_z}$.

lorsque $z \uparrow$ $\|\vec{F_{arch}}\| \searrow$ $\Rightarrow$ $\|\vec{Pa_{ll}}\| \searrow$

3°]. La flottabilité est nulle lorsque $Pa = 0$ $\Rightarrow$

$\rho(V_0 + V(z)) = m + m_1$ $\Rightarrow$ $m_1 = \rho\left(V_0 + \frac{P_{atm} \cdot V_1}{P_{atm} - \rho g z}\right) - m$.

<u>AN</u> $\boxed{m_1 = 1{,}7\,kg.}$

Partie 3 Forces centrales.

I] Q1 $\vec{F} = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}$. $\rightarrow$ $[\mathcal{G}] = [\text{Force}]\cdot\dfrac{L^2}{M^2} = \dfrac{M\cdot LT^{-2}\cdot L^2}{M^2} = \boxed{L^3M^{-1}T^{-2} = [\mathcal{G}]}$

$\boxed{\text{Unité de } \mathcal{G} : m^3 s^{-2} kg^{-1}}$

Q2] $\vec{L_O} = \vec{OM}\wedge m\vec{v}$ $\qquad \dfrac{d\vec{L_O}}{dt} = 0$ car $\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = 0$ (Force centrale).

Q3] $\vec{L_O} = \vec{cte}$ $\rightarrow$ de direction cte

$\vec{L_O} = \vec{OM}\wedge m\vec{v}$ $\Rightarrow$ $\vec{L_O} \perp$ plan $(\vec{OM}, \vec{v})$ et de direction cte $\Rightarrow$ $(\vec{OM}, \vec{v})$ $\subset$ contenus ds un plan de direction fixe $\Rightarrow$ Mvt plan.

$\vec{L_O} = \vec{OM}\wedge m\vec{v} = mr\vec{e_r}\wedge(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e_z} = m\,C\vec{e_z}$

$C = \pm\dfrac{\|\vec{L_O}\|}{m}$ suivant que $\dot{\theta} > 0$ ou $\dot{\theta} < 0$.

Q4] mvt circulaire $\quad \vec{OM} = R\vec{e_r} \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} = -\dfrac{v^2}{R}\vec{e_r}$

PFD ds le référentiel héliocentrique.

$m\vec{a} = \vec{F}$ $\Rightarrow$ en proj/$\vec{e_r}$ $\quad -m\dfrac{v^2}{R} = -\mathcal{G}\dfrac{mM_S}{R^2}$ $\rightarrow$ $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_S}{R}}}$

AN $\boxed{\begin{array}{l} v_T = 2{,}98\cdot 10^4\, m\,s^{-1} \\ v_M = 2{,}42\cdot 10^4\, m\,s^{-1}\end{array}}$

Q5] $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m\dfrac{\mathcal{G}M_S}{R}$. $\qquad E_p = -\mathcal{G}\dfrac{mM_S}{R}$.

$\Rightarrow$ $E_m = E_c + E_p = \boxed{-\mathcal{G}\dfrac{mM_S}{2R} = E_m}$

Q6] $2\pi R = v\cdot T = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_S}{R}}\cdot T$ $\Rightarrow$ $4\pi R^2 = \dfrac{\mathcal{G}M_S}{R}\cdot T^2$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}}$

Q7.

Q8 Le vaisseau est sur une orbite elliptique avec

$2a = a_T + a_M$. $\Rightarrow$ $E_m = -\frac{G m M_S}{a_T + a_M}$.

$\Rightarrow$ Pour $r = R_T = a_T$. $\frac{1}{2} m v_{T'}^2 - \frac{G m M_S}{a_T} = -\frac{G m M_S}{a_T + a_M}$.

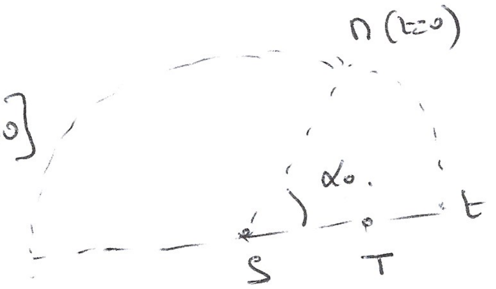
$\rightarrow$ $v_{T'}^2 = 2 G \cancel{m} M_T \left[\frac{1}{a_T} - \frac{1}{a_T + a_M}\right] = 2 G \cancel{m} M_T \cdot \frac{a_M}{a_T \cdot (a_T + a_M)}$

$v_{T'}^2 = v_T^2 \cdot \frac{2 a_M}{a_T + a_M}$ $\Rightarrow$ $\boxed{v_{T'} = v_T \cdot \sqrt{\frac{2 a_M}{a_M + a_T}}}$

$\boxed{\Delta v_T = v_{T'} - v_T = 2{,}93 \cdot 10^3 \, m s^{-1}}$

Q9 $\Delta t = \frac{T}{2}$ avec $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G M_S}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta t = 259 \text{ jours} = 2{,}23 \cdot 10^7 \, s}$ $< T_{Mars} = 687$ jours

Q10



$\pi - \alpha_0 = \frac{2\pi}{T_{Mars}} \cdot \Delta t$

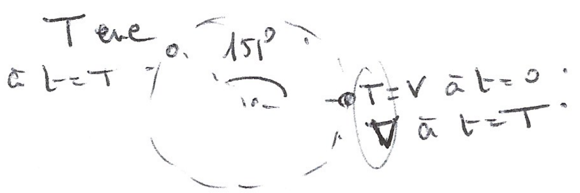
$\Rightarrow$ $\alpha_0 = \pi \left[1 - \frac{2 \Delta t}{T_{Mars}}\right] = 0{,}245\pi$ $\rightarrow$ $\boxed{\alpha_0 = 44{,}1°}$

Q11 Au bout d'une révolution complète du vaisseau, il s'est écoulé

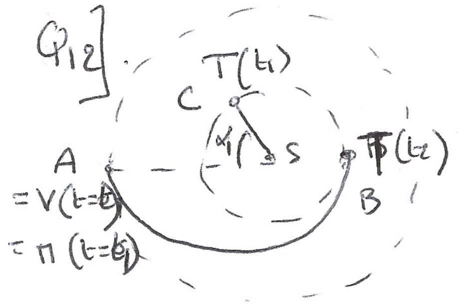
un temps $= T = 2 \cdot 259 = 518$ jours. $= 365 + 153$ jours.

La Terre a décrit un angle de $\underbrace{2\pi}_{\text{1 tour complet}} + \frac{2\pi \cdot 153}{365}$ $\rightarrow$ $0{,}41 \cdot 2\pi$ 151°

Donc Terre et le vaisseau seront décalés.



Q12]



en A ; V = M à t = 0.

Durée du transfert :

à $t = t_1$ le vaisseau est en A

la Terre en C.

à $t = t_2$ le vaisseau et la Terre sont en B.

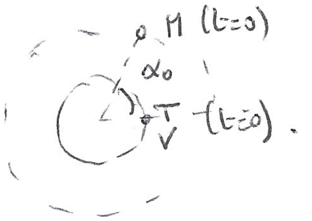
avec $t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{T}{2}$

la Terre doit décrire un angle

$\alpha_1 + \pi$ en Δt $\Rightarrow$ $\alpha_1 + \pi = \frac{2\pi}{T_T} \cdot \Delta t \rightarrow \boxed{\alpha_1 = \pi \left(\frac{2 \Delta t}{T_T} - 1 \right)}$

AN $\alpha_1 = \pi \cdot \left[\frac{2 \cdot 259}{365} - 1 \right] = 1{,}32 \text{ rad} = \boxed{75° = \alpha_1}$

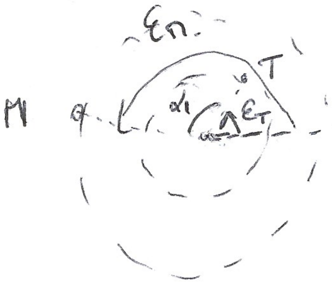
Q13] $t = 0$: instant du lancement depuis l'orbite Terrestre.



T décrit un angle $\theta_T(t) = \frac{2\pi}{T_T} \cdot t = 2n\pi + \varepsilon_T(t)$. (+ d'un tour.)

M décrit un angle. $\theta_M(t) = \frac{2\pi}{T_M} \cdot t + \alpha_0 = 2k\pi + \varepsilon_M(t)$. (+ d'un tour.)

La mission se termine lorsque l'angle Terre - Soleil - Mars $= \alpha_1$.



donc lorsque $\varepsilon_M - \varepsilon_T = \alpha_1$.

et $\varepsilon_M(t) = \frac{2\pi}{T_M} \cdot t + \alpha_0 - 2k\pi$

$\varepsilon_T(t) = \frac{2\pi}{T_T} \cdot t - 2n\pi$ avec $n > k$ car la

Terre tourne + vite que Mars

La durée t_1 de la mission vérifie $\left(\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_T} \right) t_1 + \alpha_0 + 2(n-k)\pi = \alpha_1$.

avec $n - k = 1 \rightarrow \boxed{t_1 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_0 - 2\pi)}{2\pi} \cdot \frac{T_T \cdot T_M}{T_T - T_M}}$

AN $\boxed{t_1 = 712 \text{ jours.}}$

Durée du voyage.

Durée de la mission sur Mars : $\boxed{\text{Durée mission sur Mars} = 712 - 259 = 453 \text{ jours}}$

Durée totale de la mission $\boxed{\text{Durée totale } 712 + 259 = 970 \text{ jours}}$.

La période Δt_{alt} entre 2 fenêtres de lancement est :

$$\left(\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_T}\right)\Delta t_{alt} + \cancel{\alpha_0} + 2\pi = \cancel{\alpha_0} \rightarrow \boxed{\Delta t_{alt} = \frac{T_M \cdot T_T}{T_M - T_T} = 779 \text{ jours}}$$

Q14]

Q15] en P et A $\vec{v} \perp \vec{OM}$ $\Rightarrow$ $a_T = r_P$.

Q16] $r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$. $\quad \theta = 0 \quad r_P = \dfrac{p}{1+e} = a_T$.

$\theta = \dfrac{3\pi}{4} \quad r = \dfrac{p}{1 - \frac{e}{\sqrt{2}}} = a_M$.

Q16

$$\frac{a_T}{a_M} = \frac{1 - \frac{e}{\sqrt{2}}}{1+e} \Rightarrow \boxed{e = \frac{a_M - a_T}{\frac{a_M}{\sqrt{2}} + a_T} = 0,251}$$

Q17 $\quad 2a = r_P + r_A = a_T + r_A \quad$ avec $\quad r_A = \dfrac{p}{1-e} = \dfrac{a_T(1+e)}{1-e}$.

$$2a = a_T\left(1 + \frac{1+e}{1-e}\right) = \frac{2a_T}{1-e} \Rightarrow E_m = -\frac{\mathcal{G} m M_S}{2a} = -\mathcal{G} m M_S \cdot \frac{(1-e)}{2a_T}$$

et $\quad v_T^2 = \dfrac{\mathcal{G} M_S}{a_T} \quad \Rightarrow \quad E_m = -m \cdot a_T \cdot v_T^2 \cdot \dfrac{(1-e)}{2a_T}$

$$\Rightarrow \boxed{E_m = -m v_T^2 \frac{(1-e)}{2}}$$

Q18 + Q19 $\quad \dfrac{1}{2} m v_T''^2 - \dfrac{\mathcal{G} m M_S}{a_T} = -m v_T^2 \dfrac{(1-e)}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\cancel{m} v_T''^2 - \cancel{m} v_T^2 = -\cancel{m} v_T^2 \dfrac{(1-e)}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{v_T'' = v_T\sqrt{1+e} = 3{,}34 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}}$$

$$\boxed{\Delta v_T' = v_T'' - v_T = v_T\left(\sqrt{1+e} - 1\right) = 3{,}53 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}}$$

Q20 $\quad C = r^2\dot{\theta} = \dfrac{\|\vec{L}_O\|}{m} = \boxed{a_T v_T'' = C}$

Q21 $\quad C = r^2 \dfrac{d\theta}{dt} \rightarrow dt = \dfrac{r^2 d\theta}{C} \Rightarrow \Delta t = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \dfrac{p^2}{(1+e\cos\theta)^2} d\theta$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{1}{a_T v_T''}\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{a_T^2(1+e)^2}{(1+e\cos\theta)^2} d\theta = 150 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1+0,251)^2}{3,34 \cdot 10^4} \cdot 2,15 = 1,51 \cdot 10^7 \text{ s} = \boxed{175 \text{ jours} = \Delta t_{voyage}}$$

(Curiosity 259 jours)