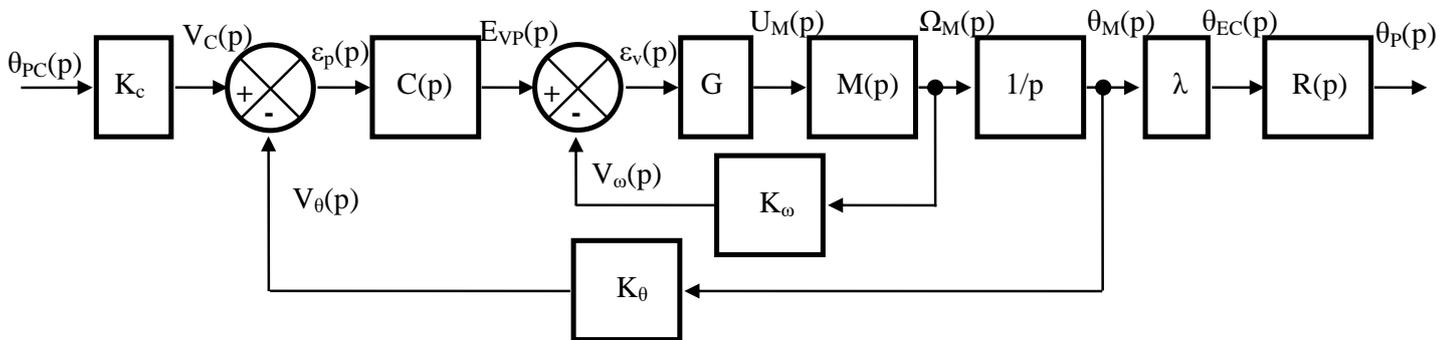


**CHAPITRE 2**  
**REGLAGE DES CORRECTEURS**  
**CORRECTION**

**1 EXERCICE 1 : ETUDE DE L'AXE D'ORIENTATION D'UNE PINCE DE ROBOT DELTA**

Q.1.



Q.2. On a  $\epsilon_p(p) = V_c(p) - V_\theta(p) = K_c \cdot \theta_{PC}(p) - K_\theta \cdot \theta_M(p) = K_c \cdot \theta_{PC}(p) - K_\theta \cdot \frac{\theta_P(p)}{\lambda}$

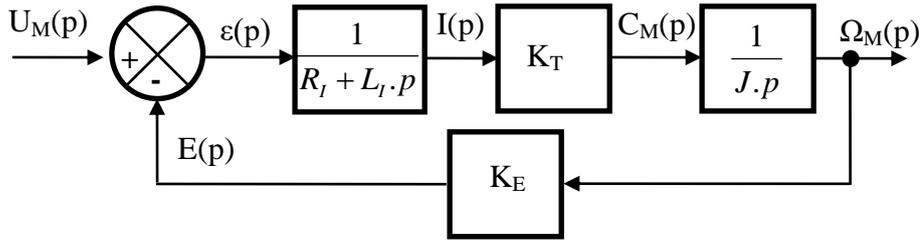
Si  $\theta_{PC}(p) = \theta_P(p)$  alors  $\epsilon_p(p) = 0 \rightarrow K_c = \frac{K_\theta}{\lambda}$

Q.3.  $u_M(t) = e(t) + R_i \cdot i(t) + L_r \cdot \frac{di(t)}{dt} \rightarrow U_M(p) = E(p) + R_i \cdot I(p) + L_r \cdot p \cdot I(p)$

$e(t) = K_E \cdot \omega_M(t) \rightarrow E(p) = K_E \cdot \Omega_M(p)$

$J \cdot \frac{d\omega_M(t)}{dt} = C_M(t) \rightarrow J \cdot p \cdot \Omega_M(p) = C_M(p)$

$C_M(t) = K_T \cdot i(t) \rightarrow C_M(p) = K_T \cdot I(p)$

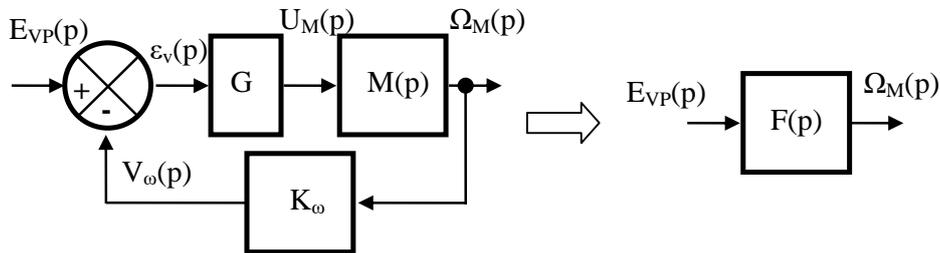


Rappel : la boucle de retour de ce schéma-bloc n'est pas une boucle d'asservissement, elle correspond seulement à la modélisation du MCC

$$M(p) = \frac{\Omega_M(p)}{U_M(p)} = \frac{1}{K_E} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{R_l + L_l \cdot p} \cdot K_T \cdot \frac{1}{J \cdot p} \cdot K_E} \cdot \frac{1}{R_l + L_l \cdot p} \cdot K_T \cdot \frac{1}{J \cdot p} \cdot K_E = \frac{1}{K_E} \cdot \frac{K_T \cdot K_E}{J \cdot p \cdot (R_l + L_l \cdot p) + K_T \cdot K_E}$$

$$M(p) = \frac{1}{K_E} \cdot \frac{1}{\frac{J \cdot L_l}{K_T \cdot K_E} \cdot p^2 + \frac{J \cdot R_l}{K_T \cdot K_E} \cdot p + 1}$$

Q.4. Etude de la boucle tachymétrique :



→ t<sub>5%</sub> minimum pour z = 0,69.

$$\text{Calcul de la FTBF : } F(p) = \frac{1}{K_\omega} \cdot \frac{G \cdot K_\omega \cdot M(p)}{1 + G \cdot K_\omega \cdot M(p)} = \frac{1}{K_\omega} \cdot \frac{\frac{G \cdot K_\omega}{K_E} \cdot \frac{K_T \cdot K_E}{J \cdot p \cdot (R_l + L_l \cdot p) + K_T \cdot K_E}}{1 + \frac{G \cdot K_\omega}{K_E} \cdot \frac{K_T \cdot K_E}{J \cdot p \cdot (R_l + L_l \cdot p) + K_T \cdot K_E}}$$

$$F(p) = \frac{1}{K_\omega} \cdot \frac{G \cdot K_\omega \cdot K_T}{J \cdot p \cdot (R_l + L_l \cdot p) + K_T \cdot K_E + G \cdot K_\omega \cdot K_T} = \frac{1}{K_\omega} \cdot \frac{G \cdot K_\omega \cdot K_T}{J \cdot R_l \cdot p + J \cdot L_l \cdot p^2 + K_T \cdot K_E + G \cdot K_\omega \cdot K_T}$$

$$F(p) = \frac{1}{K_\omega} \cdot \frac{\frac{G \cdot K_\omega \cdot K_T}{K_T \cdot K_E + G \cdot K_\omega \cdot K_T}}{1 + \frac{J \cdot R_l}{K_T \cdot K_E + G \cdot K_\omega \cdot K_T} \cdot p + \frac{J \cdot L_l}{K_T \cdot K_E + G \cdot K_\omega \cdot K_T} \cdot p^2}$$

$$F(p) = \frac{\frac{G \cdot K_T}{K_T \cdot K_E + G \cdot K_\omega \cdot K_T}}{1 + \frac{J \cdot R_l}{K_T \cdot K_E + G \cdot K_\omega \cdot K_T} \cdot p + \frac{J \cdot L_l}{K_T \cdot K_E + G \cdot K_\omega \cdot K_T} \cdot p^2} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

Avec :  $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{J.L_I}{K_T.K_E + G.K_\omega.K_T} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K_T.K_E + G.K_\omega.K_T}{J.L_I}}$

$\frac{2.z}{\omega_0} = \frac{J.R_I}{K_T.K_E + G.K_\omega.K_T} \rightarrow 2.z = \sqrt{\frac{J.R_I^2}{L_I.(K_T.K_E + G.K_\omega.K_T)}} \rightarrow 4.z^2.L_I.(K_T.K_E + G.K_\omega.K_T) = J.R_I^2$

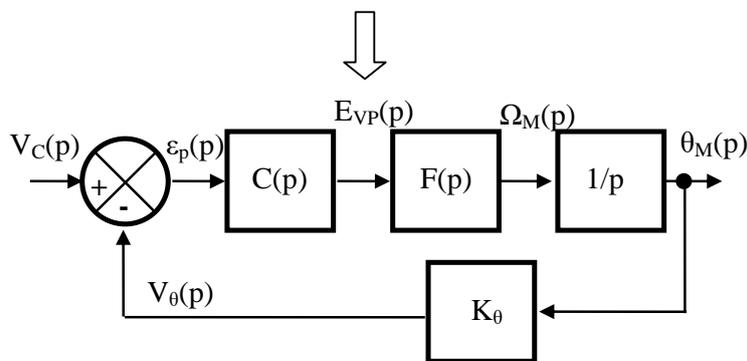
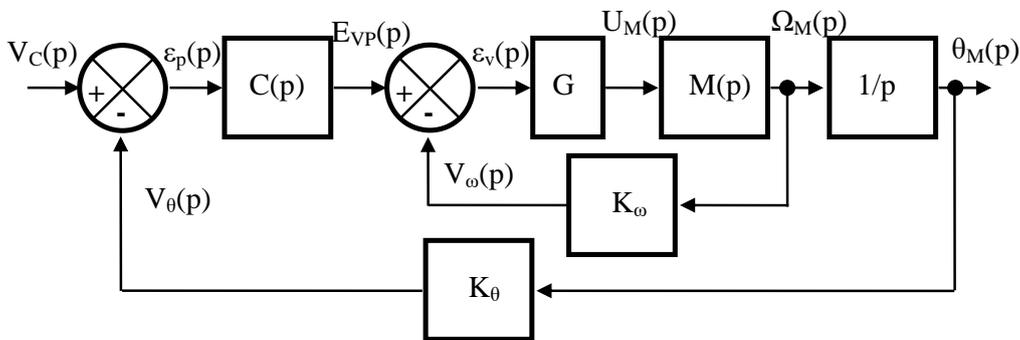
$\rightarrow G = \frac{J.R_I^2 - 4.z^2.L_I.K_T.K_E}{4.z^2.L_I.K_\omega.K_T} \rightarrow G = \frac{1}{K_\omega} \left( \frac{J.R_I^2}{4.z^2.L_I.K_T} - K_E \right)$

A.N. :  $G = \frac{1}{0,057} \left( \frac{12.10^{-5} \times 1^2}{4. \times 0,69^2 \times 1,65.10^{-3} \times 0,137} - 0,137 \right) \rightarrow G = 2,47$

Pour  $z = 0,69$  on a  $t_{5\%} . \omega_0 = 3 \rightarrow t_{5\%} = \frac{3}{\sqrt{\frac{K_T.K_E + G.K_\omega.K_T}{J.L_I}}}$

A.N. :  $t_{5\%} = \frac{3}{\sqrt{\frac{0,137 \times 0,137 + 2,47 \times 0,057 \times 0,137}{12.10^{-5} \times 1,65.10^{-3}}}} \rightarrow t_{5\%} = 6,8.10^{-3} \text{ s}$

Q.5. FTBO :  $H_B(p) = \frac{V_\theta(p)}{\varepsilon_p(p)} = \frac{88}{p(10^3 + 3,2.p + 5.3.10^{-3}.p^2)}$  pour  $C(p) = 1$  soit :



$$H_B(p) = \frac{88 \cdot 10^{-3}}{p} \cdot \frac{1}{(1 + 3,2 \cdot 10^{-3} \cdot p + 5,3 \cdot 10^{-6} \cdot p^2)}$$

Diagram annotations: "Gain pur" points to the numerator constant; "Intégrateur" points to the denominator pole at the origin; "2<sup>ème</sup> ordre avec z<1 (Δ<0)" points to the quadratic denominator term.

Le gain pur correspond au gain statique K de F(p) multiplié par K<sub>θ</sub>. Le dénominateur du système du 2<sup>ème</sup> ordre est celui est F(p). Par conséquent la pulsation propre du système du 2<sup>ème</sup> ordre est  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_T \cdot K_E + G \cdot K_\omega \cdot K_T}{J \cdot L_I}} \rightarrow \omega_0 = 439$  rad/s.

On a 0dB pour  $\omega_{co} = 0,088$  rd/s

**Q.6. Hypothèse : les courbes de gain et de phase seront assimilées à leur tracé asymptotique.**

On a 0dB pour  $\omega_{co} = 0,088$  rd/s soit une bande passante BP<sub>0</sub> = 0,088 rd/s.

Pour  $\omega_{co}$  on a une marge de phase M<sub>φ</sub> = 90° (système équivalent à un intégrateur pur pour les faibles pulsations)

La phase vaut -180° pour  $\omega_0 = 438$  rad/s → -90° de phase de l'intégrateur + -90° de phase du système du second ordre pour la pulsation de cassure (voir réponse harmonique du système du second ordre pour z<1)

Comme on ne considère que la courbe de gain est assimilée à son tracé asymptotique, on considère que pour cette pulsation on a juste un gain pur.

→ le gain pour cette pulsation vaut donc  $G_{dB} = 20 \cdot \log \frac{K}{j\omega_0} = 20 \cdot \log(K) - 20 \cdot \log(\omega_0) = -73,95$  dB soit M<sub>G</sub> = 73,95 dB.

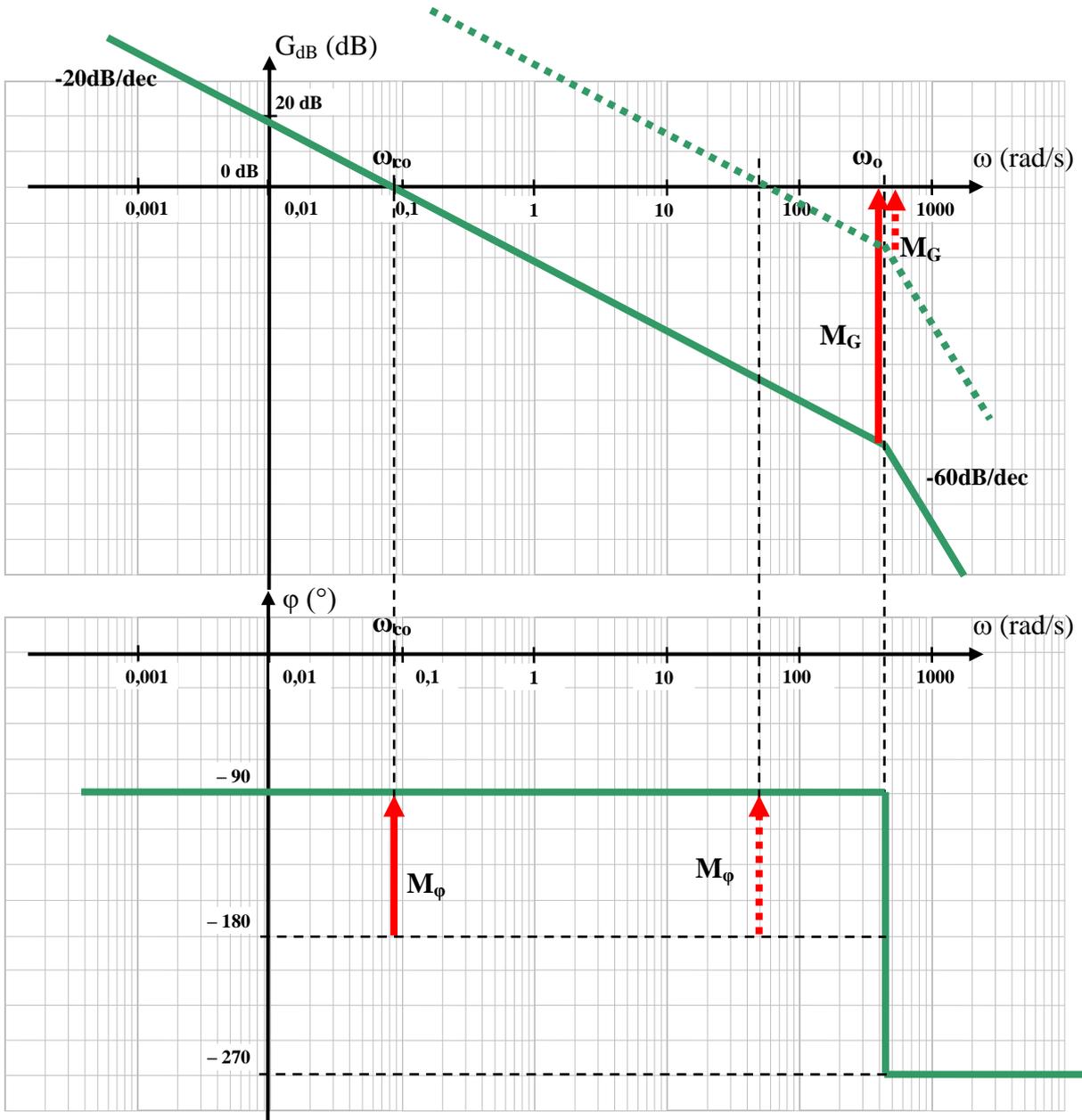
Seul le critère BP<sub>0</sub> du C.d.C.F. n'est pas respecté.

**Q.7. Hypothèse : les courbes de gain et de phase seront assimilées à leur tracé asymptotique.**

Pour avoir une bande passante BP<sub>0</sub> de 50 rad/s il faut  $0,088 \cdot C_0 = 50 \rightarrow C_0 = 568$ .

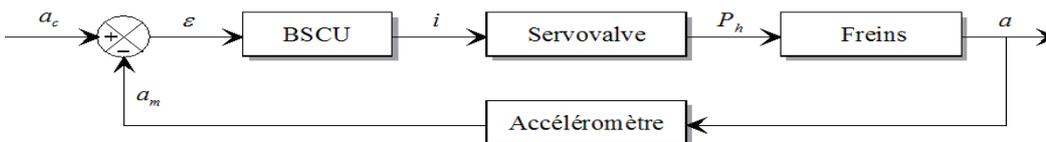
La marge de phase est toujours de -90°.

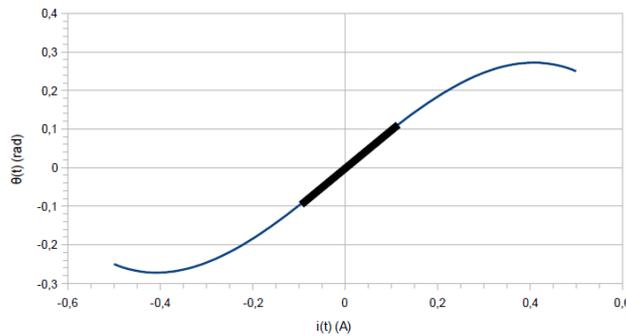
Le gain pour cette pulsation vaut donc  $G_{dB} = 20 \cdot \log \frac{K}{\omega_0} = 20 \cdot \log(K) - 20 \cdot \log(\omega_0) = -18,8$  dB soit une marge de gain M<sub>G</sub> = 18,8 dB.



**2 EXERCICE 2: SYSTEME DE FREINAGE DE L’AIRBUS A318**

**Question 1 :** Réaliser un schéma-bloc fonctionnel de l’asservissement en décélération à partir des indications ci-dessus. On prendra  $a_c(t)$  comme entrée et  $a(t)$  comme sortie.





**Question 2 :** Que peut-on dire de cette caractéristique sur tout le domaine de variation de  $i(t)$  ? Sachant que  $\theta$  est très petit (varie autour de 0), on utilise la relation suivante  $\theta(t) = K_1 i(t)$ . Déterminer la valeur de  $K_1$  à partir de la courbe.

Cette courbe est non-linéaire sur tout le domaine de variation de  $i$ . Comme  $\theta$  est très petit, on peut linéariser la courbe au voisinage de 0. La valeur de  $K_1$  correspond ainsi à la pente de la courbe :  $K_1 = (0.1 - (-0.1)) / (0.1 - (-0.1)) = 1 \text{ rad/A}$

**Question 3 :** Calculer la fonction de transfert  $H_t(p) = \frac{Z(p)}{\Delta P(p)}$  où  $Z(p)$  et  $\Delta P(p)$  sont les transformées de Laplace de  $z(t)$  et  $\Delta P(t)$  en précisant l'hypothèse retenue

Pour obtenir cette équation PFD : RD sur  $Z$ , Bilan : Ressort  $-2k_t z(t)$  ; Visq :  $-C_t(dz(t)/dt)$  ;

Pression  $-(P_0 - \Delta P)S_t$  et  $(P_0 + \Delta P)S_t$  soit au final  $2\Delta P S_t$

On passe l'équation dans le domaine de Laplace en se plaçant dans les conditions de Heaviside :

$$m_t p^2 Z(p) = -2k_t Z(p) + 2S_t \Delta P(p) - c_t p Z(p)$$

$$\frac{Z(p)}{\Delta P(p)} = \frac{2S_t}{m_t p^2 + c_t p + 2k_t}$$

La fonction de transfert est donc :

**Question 4 :** Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et donner son ordre.

On factorise le dénominateur par  $2k_t$  pour obtenir :

$$\frac{Z(p)}{\Delta P(p)} = \frac{\frac{S_t}{k_t}}{1 + \frac{c_t}{2k_t} p + \frac{m_t}{2k_t} p^2}$$

Son ordre est de 2

**Question 5 :** A partir de toutes les informations précédentes (modélisation armature, buse/palette, tiroir...), compléter le schéma-bloc de la servovalve donné dans le document réponse, en précisant les fonctions de transfert de chaque bloc (utiliser les notations algébriques).

On utilise les équations :

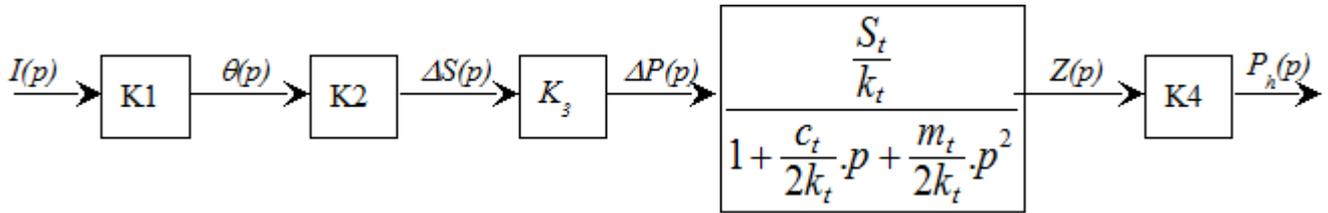
$$\theta(t) = K_1 i(t)$$

$$\Delta S = K_2 \theta$$

$$\Delta P = K_3 \Delta S$$

$$P_h(t) = K_4 z(t) \text{ qui ne changent pas dans le domaine de Laplace.}$$

On aboutit alors au schéma-bloc



**Question 6 :** En déduire la fonction de transfert  $S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)}$  de la servovalve

$$S_v(p) = \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot \frac{S_t}{k_t}}{1 + \frac{c_t}{2k_t} p + \frac{m_t}{2k_t} p^2}$$

La fonction de transfert est directement :

**Question 7 :** Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

où on donnera les expressions littérales de  $K_{sv}, \xi$  et  $\omega_0$

On identifie terme à terme :

– Gain statique :  $K_{sv} = \frac{S_t \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4}{k_t}$       Pulsation propre :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k_t}{m_t}}$

Coefficient d'amortissement :

$$\xi = \frac{c_t}{2\sqrt{2k_t \cdot m_t}}$$

**Question 8 :** A quelle valeur de  $\xi$  correspond cette spécification ?

Pour ne pas avoir de dépassement, il faut que  $\xi \geq 1$  Pour être le plus rapide possible, on doit donc avoir  $\xi = 1$

**Question 9 :** Démontrer que cette condition ne peut être satisfaite que si  $k_t = \frac{c_t^2}{8m_t}$

Pour cette valeur on a :  $2\sqrt{2k_t \cdot m_t} = c_t$ , soit  $8k_t m_t = c_t^2$ , d'où le résultat annoncé.

**Question 10 :** Montrer alors que la fonction de transfert de la servovalve peut se mettre sous la forme :

on donnera l'expression littérale de  $T_{sv}$

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{(1 + T_{sv} p)^2}$$

Avec  $\xi = 1$ , le polynôme du dénominateur de la fonction de transfert  $S_v(p)$  possède un discriminant nul et

donc une racine réelle double  $p = -\omega_0$ . Il s'écrit sous la forme :  $\left(1 + \frac{1}{\omega_0} p\right)^2$

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{\left(1 + \frac{1}{\omega_0} p\right)^2}$$

Ainsi :

La constante de temps  $T_{sv}$  s'exprime :  $T_{sv} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m_t}{2k_t}}$  et  $k_t = \frac{c_t^2}{8m_t}$  d'où

$$T_{sv} = \sqrt{\frac{8m_t^2}{2c_t^2}} = 2 \frac{m_t}{c_t}$$

**Question 11 :** Déterminer la réponse indicielle  $P_h(t)$  pour une entrée échelon de valeur  $i(t)=i_0 u(t)$

**Aide :** On rappelle que  $L(\exp(-at)u(t)) = \frac{1}{(p+a)^2}$

L'échelon d'entrée s'écrit :  $I(p) = \frac{i_0}{p}$

On calcule  $P_h(p)$  en fonction de  $i_0$  :  $P_h(p) = i_0 \frac{K_{sv}}{p(1+T_{sv}p)^2}$

La décomposition en éléments simples donne :  $P_h(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+T_{sv}p} + \frac{C}{(1+T_{sv}p)^2}$

On évalue  $p P_h(p)$  en  $p=0$ , pour obtenir :  $A = K_{sv} i_0$

On évalue  $(1+T_{sv}p)^2 P_h(p)$  en  $p = -1/T_{sv}$  pour obtenir :  $C = -K_{sv} i_0 T_{sv}$

On calcule la limite de  $p P_h(p)$  en l'infini et on obtient :  $A + \frac{B}{T_{sv}} = 0$  soit  $B = -AT_{sv} = C$

Ainsi  $P_h(p) = K_{sv} i_0 \left( \frac{1}{p} - \frac{T_{sv}}{1+T_{sv}p} - \frac{T_{sv}}{(1+T_{sv}p)^2} \right)$

Soit après réécriture  $P_h(p) = K_{sv} i_0 \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{T_{sv}}+p} - \frac{\frac{1}{T_{sv}}}{(\frac{1}{T_{sv}}+p)^2} \right)$

On obtient de retour dans le domaine temporel :

$$P_h(t) = K_{sv} i_0 u(t) \left( 1 - \exp(-t/T_{sv}) - \frac{t}{T_{sv}} \exp(-t/T_{sv}) \right)$$

**Question 12 :** Déterminer les transformées de Laplace des expressions (1) à (5).

(1)  $\varepsilon(p) = X_1(p) - X_2(p)$

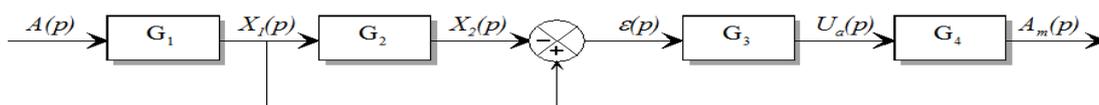
(2)  $A(p) = p^2 X_1(p)$

(3)  $m_a p^2 X_2(p) = c_a p (X_1(p) - X_2(p)) + k_a (X_1(p) - X_2(p))$

(4)  $U_a(p) = K_p \varepsilon(p)$

(5)  $A_m(p) = K_{CAN} U_a(p)$

**Question 13 :** En déduire les transmittances  $G_i$  du schéma bloc ci-après.



$$G_1 = \frac{X_1(p)}{A(p)} = \frac{1}{p^2}$$

$$G_3 = \frac{U_a(p)}{\varepsilon(p)} = K_p$$

$$G_4 = \frac{A_m(p)}{U_a(p)} = K_{CAN}$$

$$G_2 = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{c_a p + k_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a}$$

De l'équation (3), on extrait :

**Question 14 :** En déduire la fonction de transfert  $\frac{A_m(p)}{A(p)}$  et montrer qu'elle peut se

mettre sous la forme  $\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{K_{acc}}{1 + 2\frac{\xi_a p}{\omega_a} + \frac{p^2}{\omega_a^2}}$ . Donner les expressions de  $K_{acc}$ ,  $\xi_a$  et  $\omega_a$

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = G_1 \cdot G_3 \cdot G_4 (1 - G_2)$$

La fonction de transfert est :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{K_p \cdot K_{CAN}}{p^2} \left( 1 - \frac{c_a p + k_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a} \right)$$

On remplace les transmittances  $G_i$  :

$$\square \quad \frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{m_a \cdot K_p \cdot K_{CAN}}{m_a p^2 + c_a p + k_a}$$

Fonction de transfert sous sa forme canonique :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{m_a \cdot K_p \cdot K_{CAN}}{k_a} \frac{1}{1 + \frac{c_a}{k_a} p + \frac{m_a}{k_a} p^2}$$

$$\text{Gain statique : } K_{acc} = \frac{m_a \cdot K_p \cdot K_{CAN}}{k_a} \quad \text{Pulsation propre : } \omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$$

$$\text{Coefficient d'amortissement : } \xi_a = \frac{c_a}{2\sqrt{k_a \cdot m_a}}$$

**Question 15 :** La figure ci-dessous donne la réponse indicielle (entrée unitaire) de l'accéléromètre. Identifier les valeurs des constantes  $K_{acc}$ ,  $\xi_a$  et  $\omega_a$  (On pourra utiliser les abaques donnés en annexe).

La valeur asymptotique vaut  $1 = K E_0$  avec  $E_0 = 1$  donc le gain est égal à 1

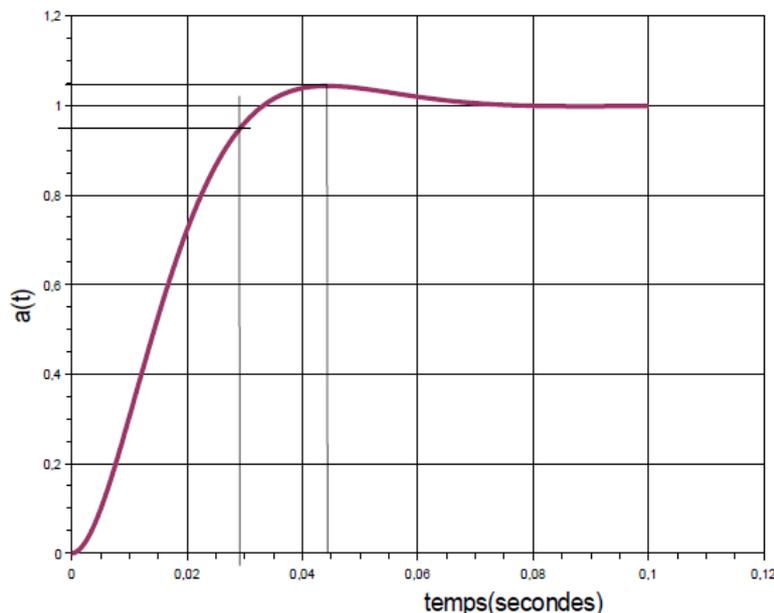
Le premier dépassement a pour valeur approximative  $1.05 - 1 = 0.05$  soit un taux de dépassement de 5%

Sur l'abaque on en déduit :  $\xi_a = 0.7$

Ainsi l'abaque du temps de réponse réduit donne :  $Tr = 3$

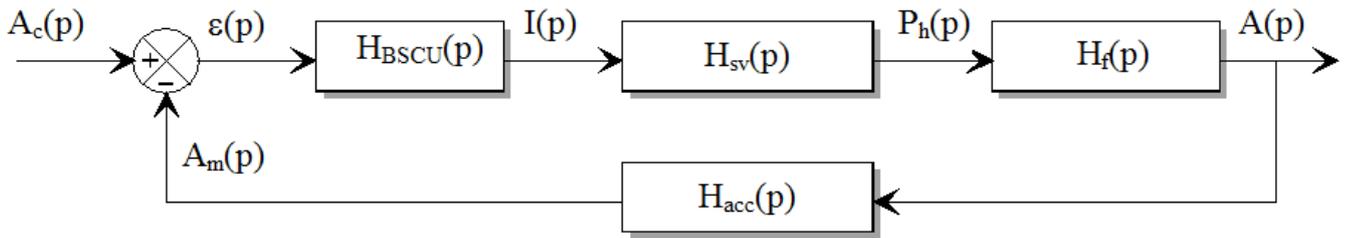
Comme on mesure un temps de réponse à 5% de 0.045s environ (ou 0.029 si temps d'avant)

D'où  $\omega_0 = 67 \text{ rad/s}$  (ou  $100 \text{ rad/s}$ )



**Partie III - Etude de l'asservissement global**

La boucle d'asservissement en décélération est donnée ci-après :



avec  $H_{sv}(p) = \frac{K_{sv}}{(1+T_{sv}p)^2}$ ,  $H_{acc}(p) = \frac{K_{acc}}{1+2\frac{\xi_a}{\omega_a}p+\frac{p^2}{\omega_a^2}}$ ,  $H_f(p) = K_f$ ,  $H_{BSCU} = K_c$

**Question 16 :** Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte. En déduire l'ordre, la classe et le gain de la FTBO(p).

FTBO :

$$FTBO = \frac{A_m(p)}{\varepsilon(p)} = K_c \cdot \frac{K_{sv}}{(1+T_{sv}p)^2} \cdot K_f \cdot \frac{K_{acc}}{1+2\frac{\xi_a}{\omega_a}p+\frac{p^2}{\omega_a^2}}$$

FTBO sous sa forme canonique :

$$FTBO = \frac{K_c \cdot K_{sv} \cdot K_f \cdot K_{acc}}{(1+T_{sv}p)^2 \left(1+2\frac{\xi_a}{\omega_a}p+\frac{p^2}{\omega_a^2}\right)}$$

Caractéristiques de la FTBO :

– Ordre : 4 , classe : 0 , gain :  $K_{BO} = K_c \cdot K_{sv} \cdot K_f \cdot K_{acc}$

**Question 17 :** Exprimer l'écart  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $a_c(p)$  et de la FTBO(p)

Dans le domaine de Laplace, l'expression de l'écart  $\varepsilon(p)$  en fonction de l'entrée  $A_c(p)$  est :

$$\varepsilon(p) = \frac{A_c(p)}{1+FTBO} \text{ car } \varepsilon(p) = A_c(p) - A_m(p) = A_c(p) - FTBO\varepsilon(p)$$

**Question 18 :** En déduire l'écart en régime permanent à une entrée de type échelon d'accélération  $a_c(t) = a_c u(t)$ . Que peut on dire de la performance de précision pour ce correcteur ?

On applique le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p \cdot A_c(p)}{1+FTBO} \right)$$

$$A_c(p) = \frac{a_c}{p}$$

Or pour un échelon d'amplitude  $a_c$  :

D'autre part :

$$\lim_{p \rightarrow 0} FTBO = K_{BO}$$

$$\varepsilon = \frac{a_c}{1 + K_{BO}} = \frac{a_c}{1 + K_c \cdot K_{sv} \cdot K_f \cdot K_{acc}}$$

D'où l'écart en régime permanent :

Ce système n'est pas précis car l'écart n'est pas nul.

**Question 19 :** On utilise un correcteur (correcteur PI) plus évolué de fonction de transfert  $H_{BSCU} = K_i \frac{(1+T_i p)}{p}$ , déterminer à nouveau l'écart en régime permanent et conclure sur ce choix de correcteur.

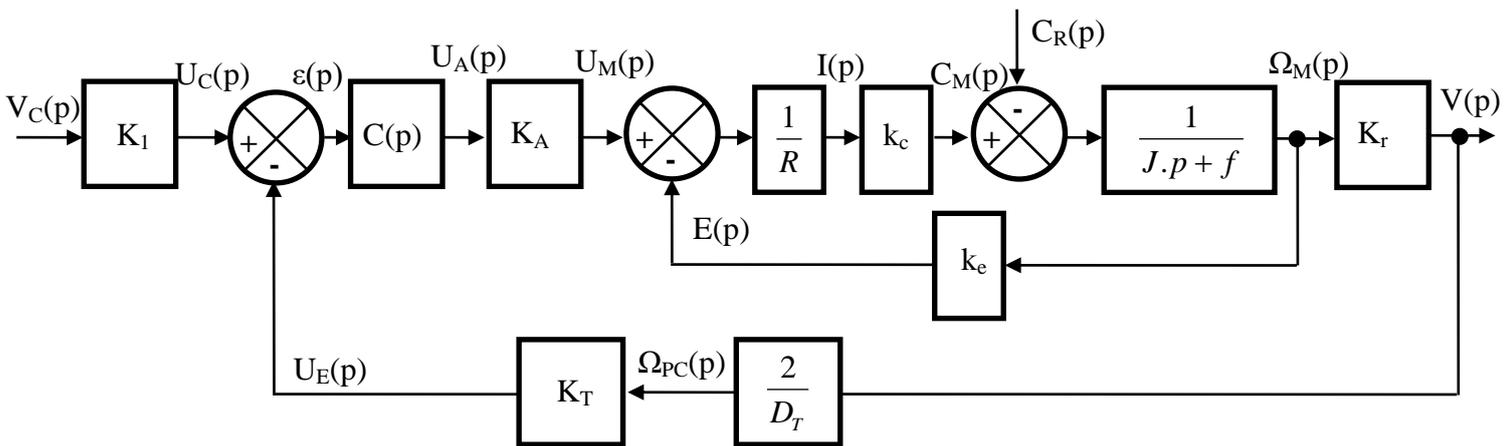
$$FTBO = \frac{K_c \cdot K_{sv} \cdot K_f \cdot K_{acc}}{(1 + T_{sv} \cdot p)^2 \left( 1 + 2 \frac{\xi_a}{\omega_a} p + \frac{p^2}{\omega_a^2} \right)}$$

Cette fois, la FTBO vaut :

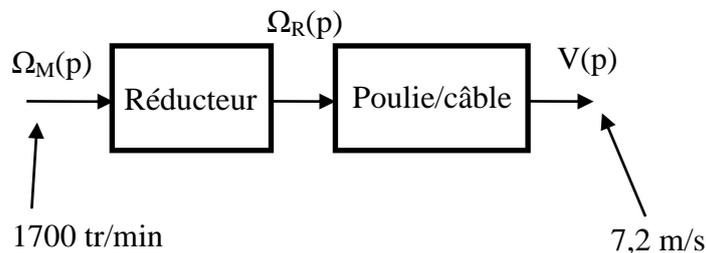
$K_i K_{sv} K_f K_{acc} \frac{1+T_i p}{p(1+T_{sv} p)^2 \left( 1 + 2 \frac{\xi_a}{\omega_a} p + \frac{p^2}{\omega_a^2} \right)}$  d'où une limite infinie quand  $p$  tend vers 0 Ainsi l'écart vaut donc 0, le système est précis.

### 3 EXERCICE 3 : ÉTUDE DE L'ASSERVISSEMENT EN VITESSE DU CABLE TRACTEUR DU TELEPHERIQUE A CONDUITE DOUBLE FUNITEL

Q.1.



Avec  $K_r = \frac{V(p)}{\Omega_M(p)}$  tel que :



Soit  $K_r = \frac{V(p)}{\Omega_M(p)} = \frac{7,2}{1700 \times \frac{2 \cdot \pi}{60}} = 0,04$

Q.2. On a  $\varepsilon(p) = U_c(p) - U_\varepsilon(p) = K_1 \cdot V_c(p) - K_r \cdot \frac{2}{D_T} \cdot V(p)$

Pour  $V_c(p) = V(p)$  on doit avoir  $\varepsilon(p) = 0 \rightarrow K_1 - K_r \cdot \frac{2}{D_T} = 0 \rightarrow K_1 = K_r \cdot \frac{2}{D_T}$

$$\text{A.N. : } K_1 = 0,3 \cdot \frac{2}{0,4} = 1,5 \text{ V.s.m}^{-1}$$

$$\text{Q.3. } H_M(p) \Big|_{C_R(p)=0} = \frac{\Omega_M(p)}{U_M(p)} = \frac{1}{k_e} \cdot \frac{\frac{1}{R} \cdot k_c \cdot \frac{1}{f + J \cdot p} \cdot k_e}{1 + \frac{1}{R} \cdot k_c \cdot \frac{1}{f + J \cdot p} \cdot k_e} = \frac{1}{k_e} \cdot \frac{k_c \cdot k_e}{R \cdot (f + J \cdot p) + k_c \cdot k_e}$$

$$H_M(p) \Big|_{C_R(p)=0} = \frac{1}{k_e} \cdot \frac{k_c \cdot k_e}{J \cdot R \cdot p + k_c \cdot k_e + R \cdot f} = \frac{\frac{k_c}{k_c \cdot k_e + R \cdot f}}{\frac{J \cdot R}{k_c \cdot k_e + R \cdot f} \cdot p + 1}$$

$$H_R(p) \Big|_{U_M(p)=0} = \frac{C_R(p)}{U_M(p)} = \frac{R}{k_c \cdot k_e} \cdot \frac{\frac{1}{R} \cdot k_c \cdot \frac{1}{f + J \cdot p} \cdot k_e}{1 + \frac{1}{R} \cdot k_c \cdot \frac{1}{f + J \cdot p} \cdot k_e} = \frac{R}{k_c \cdot k_e} \cdot \frac{k_c \cdot k_e}{J \cdot R \cdot p + k_c \cdot k_e + R \cdot f}$$

$$H_R(p) \Big|_{U_M(p)=0} = \frac{C_R(p)}{U_M(p)} = \frac{R}{k_c \cdot k_e} \cdot \frac{\frac{1}{R} \cdot k_c \cdot \frac{1}{f + J \cdot p} \cdot k_e}{1 + \frac{1}{R} \cdot k_c \cdot \frac{1}{f + J \cdot p} \cdot k_e} = \frac{\frac{R}{k_c \cdot k_e + R \cdot f}}{\frac{J \cdot R}{k_c \cdot k_e + R \cdot f} \cdot p + 1}$$

Enfin en utilisant le théorème de superposition on obtient :

$$\Omega_M(p) = H_M(p) \Big|_{C_R(p)=0} \cdot U_M(p) - H_R(p) \Big|_{U_M(p)=0} \cdot C_R(p)$$

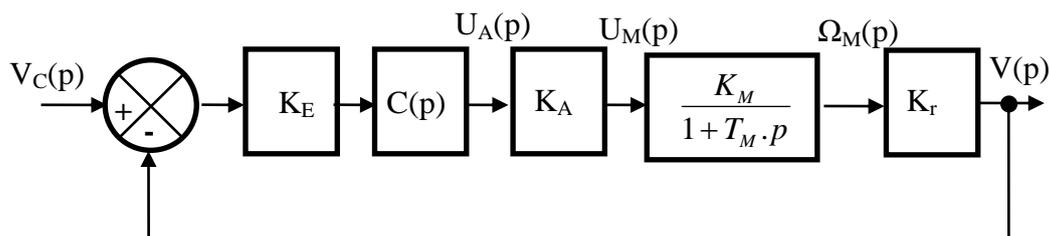
$$\text{Q.4. } H_M(p) \Big|_{C_R(p)=0} = \frac{\frac{k_c}{k_c \cdot k_e + R \cdot f}}{\frac{J \cdot R}{k_c \cdot k_e + R \cdot f} \cdot p + 1} = \frac{K_M}{T_M \cdot p + 1}$$

$$\rightarrow \text{système du 1}^{\text{er}} \text{ ordre avec } K_M = \frac{k_c}{k_c \cdot k_e + R \cdot f} \text{ et } T_M = \frac{J \cdot R}{k_c \cdot k_e + R \cdot f}$$

$$\text{A.N. : } K_M = \frac{2,5}{2,5 \times 2,5 + 0,0999 \times 4,8} = 0,37 \text{ rad.V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$T_M = \frac{420 \times 0,0999}{2,5 \times 2,5 + 0,0999 \times 4,8} = 6,23 \text{ s}$$

Q.5. En régulation le schéma bloc devient :



$$\text{Avec } K_E = K_T \cdot \frac{2}{D_T} = K_1 \text{ et } C(p) = K_C$$

Calcul de la FTBF : 
$$\frac{V(p)}{V_C(p)} = \frac{\frac{K_E \cdot K_C \cdot K_A \cdot K_M \cdot K_r}{1 + T_M \cdot p}}{1 + \frac{K_E \cdot K_C \cdot K_A \cdot K_M \cdot K_r}{1 + T_M \cdot p}} = \frac{\frac{K_C \cdot K_S}{1 + T_M \cdot p}}{1 + \frac{K_C \cdot K_S}{1 + T_M \cdot p}}$$

$$\frac{V(p)}{V_C(p)} = \frac{K_C \cdot K_S}{1 + K_C \cdot K_S + T_M \cdot p} = \frac{\frac{K_C \cdot K_S}{1 + K_C \cdot K_S}}{1 + \frac{T_M}{1 + K_C \cdot K_S} \cdot p} \rightarrow G(p) = \frac{V(p)}{V_C(p)} = \frac{\frac{K_C \cdot K_S}{1 + K_C \cdot K_S}}{1 + \frac{T_M}{1 + K_C \cdot K_S} \cdot p}$$

Q.6. On obtient question 5 un système du 1<sup>er</sup> ordre → stable par définition.

Q.7.  $t_{5\%} = 3 \cdot \frac{T_M}{1 + K_C \cdot K_S}$  par définition pour un système du 1<sup>er</sup> ordre.

C.d.C.F. →  $t_{5\%} < 5 \text{ s} \rightarrow 3 \cdot \frac{T_M}{1 + K_C \cdot K_S} < 5 \rightarrow K_C > \left(\frac{3 \cdot T_M}{5 \cdot K_S} - 1\right) \frac{1}{K_S}$ .

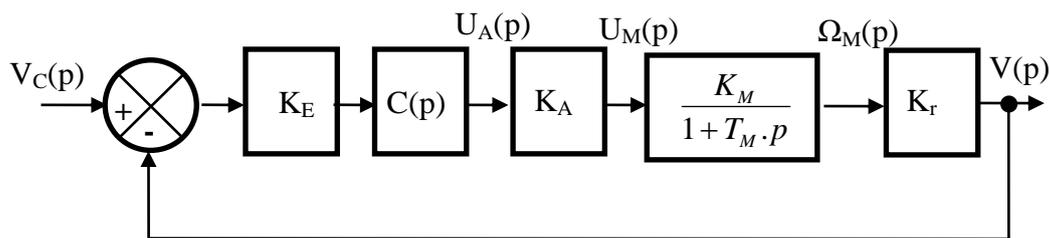
A.N. :  $K_S = K_A \cdot K_E \cdot K_r \cdot K_M = 30 \times 1,5 \times 0,04 \times 0,37 = 0,67 \rightarrow K_C > 4,15$

Q.8. Erreur statique :  $e_r = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{V_0}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_C \cdot K_S}{1 + T_M \cdot p}} = \frac{V_0}{1 + K_C \cdot K_S}$  et C.d.C.F. →  $e_r < 0,02 \cdot V_0$

→  $\frac{V_0}{1 + K_C \cdot K_S} < 0,02 \cdot V_0 \rightarrow 1 < 0,02 \cdot (1 + K_C \cdot K_S) \rightarrow 0,98 < 0,02 \cdot K_C \cdot K_S \rightarrow K_C > \frac{0,98}{0,02 \cdot K_S} \approx 74$

Q.9. Pour  $K_C = 74$  et  $V_0 = 7,2$  on obtient une tension  $U_M$  en entrée de moteur  $U_M = 7,2 \times 1,5 \times 30 \times 74 = 23976 \text{ V} \gg \gg 300 \text{ V}$  nominal du moteur → le correcteur proportionnel n'est pas adapté.

Q.10. En régulation le schéma bloc devient :



Avec  $K_E = K_T \cdot \frac{2}{D_T} = K_1$  et  $C(p) = \frac{K_i}{p}$

Calcul de la FTBF : 
$$\frac{V(p)}{V_C(p)} = \frac{\frac{K_E \cdot K_i \cdot K_A \cdot K_M \cdot K_r}{p \cdot (1 + T_M \cdot p)}}{1 + \frac{K_E \cdot K_i \cdot K_A \cdot K_M \cdot K_r}{p \cdot (1 + T_M \cdot p)}} = \frac{\frac{K_i \cdot K_S}{p \cdot (1 + T_M \cdot p)}}{1 + \frac{K_i \cdot K_S}{p \cdot (1 + T_M \cdot p)}}$$

$$\frac{V(p)}{V_C(p)} = \frac{K_i \cdot K_S}{T_M \cdot p^2 + p + K_i \cdot K_S} = \frac{1}{\frac{T_M}{K_i \cdot K_S} \cdot p^2 + \frac{1}{K_i \cdot K_S} p + 1} \rightarrow H(p) = \frac{V(p)}{V_C(p)} = \frac{1}{\frac{T_M}{K_i \cdot K_S} \cdot p^2 + \frac{1}{K_i \cdot K_S} p + 1}$$

Système du 2<sup>ème</sup> ordre avec :

$$K=1 \quad ; \quad \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{T_M}{K_i \cdot K_S} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K_i \cdot K_S}{T_M}} \quad ; \quad \frac{2 \cdot z}{\omega_0} = \frac{1}{K_i \cdot K_S} \rightarrow z = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{K_i \cdot K_S \cdot T_M}}$$

**Q.11.** FTBO de classe 1  $\rightarrow$  erreur statique nulle  $\rightarrow$  C.d.C.F. ok.

$$\text{Q.12. } D_1 = e^{-\frac{z \cdot \pi}{\sqrt{1-z^2}}} = 0,1 \rightarrow -\frac{z \cdot \pi}{\sqrt{1-z^2}} = \ln 0,1 \rightarrow z^2 \cdot \pi^2 = (\ln 0,1)^2 \cdot (1-z^2)$$

$$\rightarrow z^2 \cdot (\pi^2 + (\ln 0,1)^2) = (\ln 0,1)^2 \rightarrow z = \sqrt{\frac{(\ln 0,1)^2}{(\pi^2 + (\ln 0,1)^2)}} = 0,6$$

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{K_i \cdot K_S \cdot T_M}} \rightarrow 4 \cdot z^2 = \frac{1}{K_i \cdot K_S \cdot T_M} \rightarrow K_i = \frac{1}{4 \cdot z^2 \cdot K_S \cdot T_M}$$

$$\text{A.N. : } K_i = \frac{1}{4 \times 0,6^2 \times 0,67 \times 6,23} = 0,17$$

$$\text{Q.13. Pour } z = 0,6 \text{ on a } t_{5\%} \cdot \omega_0 = 5 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_i \cdot K_S}{T_M}} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{0,17 \times 0,67}{6,23}} = 0,13 \text{ rad/s}$$

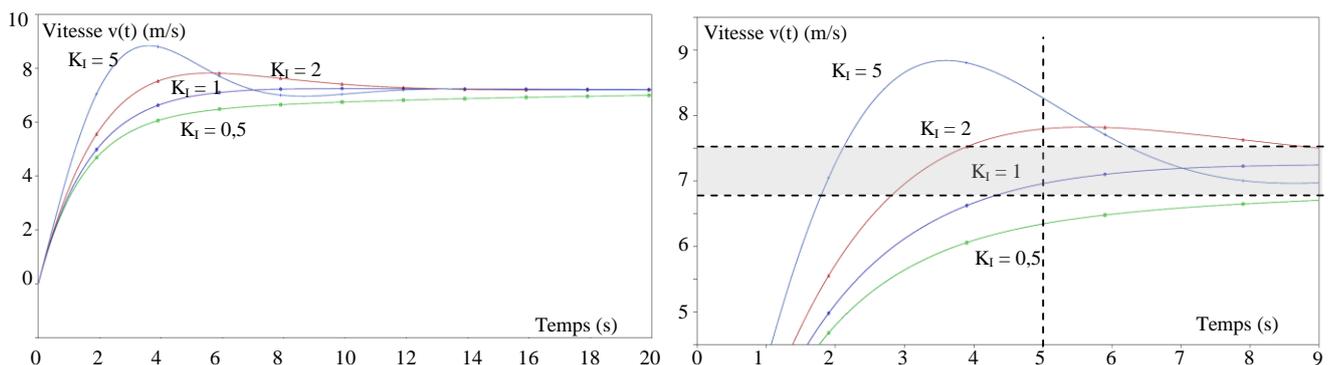
$$\rightarrow t_{5\%} = \frac{5}{\omega_0} = \frac{5}{0,13} = 38,5 \text{ s} \rightarrow \text{Système très lent.}$$

$$\text{Q.14. Temps de réponse minimal pour } z = 0,7 \rightarrow K_i = \frac{1}{4 \times 0,7^2 \times 0,67 \times 6,23} = 0,12 \rightarrow$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{0,12 \times 0,67}{6,23}} = 0,11 \rightarrow t_{5\%} = \frac{3}{\omega_0} = \frac{3}{0,11} = 27,2 \text{ s} \rightarrow \text{Système trop lent encore.}$$

L'action intégrale pure ne permet pas de corriger le système correctement.

**Q.15.**



$K_i = 1$  est le bon gain qui permet de respecter le critère de rapidité, de précision et de dépassement imposé par le C.d.C.F..

**Q.16.** Il faudrait déterminer la fonction de transfert qui permet de passer de la vitesse du vent à une action mécanique sous forme de couple résistant. Dans le sujet on suppose que l'action du vent est modélisable par un couple résistant sous forme de perturbation en échelon. Avec le correcteur PI il y a un intégrateur dans la boucle ouverte en amont de la perturbation, l'erreur en régulation est donc nulle.

#### 4 EXERCICE 4 : STABILISATEUR GYROSCOPIQUE DE BATEAU

**Question 1** A l'aide des équations (eq 3, eq 4, eq 5) et en supposant les conditions initiales nulles, donner les fonctions de transfert  $H_1(p)$  à  $H_6(p)$  du schéma-blocs du document réponses.

$$H_1(p) = \frac{2 \cdot B \cdot S \cdot e}{V_0 \cdot p}$$

$$H_2(p) = \frac{1}{I_g \cdot p}$$

$$H_4(p) = \frac{p}{I_b \cdot p^2 + f_b \cdot p + k_b}$$

$$H_5(p) = \frac{1}{p}$$

$$H_6(p) = S \cdot e$$

**Question 2** Montrer que ce schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante où l'on précisera l'expression de  $g_e$  et  $g_p$  en fonction de  $g''$  à  $g^p$  uniquement. (Ne surtout pas remplacer par les expressions trouvées à la question précédente).

A partir du schéma-bloc donné dans l'énoncé, on veut :

$$\alpha(p) = H_b(p) \cdot (K_{sv} \cdot I(p) - H_a(p) \cdot C_{mer}(p))$$

D'après le schéma-blocs initial, on a :

$$\alpha(p) = H_4(p) \cdot H_5(p) \cdot (C_{mer}(p) + H_3(p) \cdot \Omega_\beta(p))$$

$$\alpha(p) = H_4(p) \cdot H_5(p) \cdot (C_{mer}(p) + H_3(p) \cdot H_2(p) \cdot (C_b(p) - H_3(p) \cdot \Omega_\alpha(p)))$$

$$\alpha(p) = H_4(p) \cdot H_5(p) \cdot (C_{mer}(p) + H_3(p) \cdot H_2(p) \cdot (H_1(p) \cdot (K_{sv} \cdot I(p) - H_6(p) \cdot \Omega_\beta(p)) - H_3(p) \cdot \Omega_\alpha(p)))$$

Or :

$$\Omega_\alpha(p) = \frac{\alpha(p)}{H_5(p)}$$

Et :

$$\Omega_\beta(p) = \frac{1}{H_3(p)} \cdot \left( \frac{\alpha(p)}{H_4(p) \cdot H_5(p)} - C_{mer}(p) \right)$$

On en déduit donc :

$$\alpha(p) = H_4(p) \cdot H_5(p) \cdot (C_{mer}(p) + H_3(p) \cdot H_2(p) \cdot \left( H_1(p) \cdot (K_{sv} \cdot I(p) - H_6(p) \cdot \frac{1}{H_3(p)} \cdot \left( \frac{\alpha(p)}{H_4(p) \cdot H_5(p)} - C_{mer}(p) \right)) - H_3(p) \cdot \frac{\alpha(p)}{H_5(p)} \right))$$

Après factorisation en  $\alpha(p)$  et  $C_{mer}(p)$ , on identifie :

$$H_a(p) = \frac{H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p) \cdot H_4(p) \cdot H_5(p)}{1 + H_2(p) \cdot H_3(p)^2 \cdot H_4(p) + H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_6(p)}$$

Et

$$H_b(p) = - \frac{1 + H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_6(p)}{H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)}$$

**Question 3** Proposer un modèle de comportement simplifié de la fonction de transfert à partir des diagrammes de Bode sur la bande de pulsations induites par la mer  $]0; 10 \cdot \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}]$ . Expliquer la démarche permettant de déterminer les valeurs numériques des paramètres caractéristiques de cette fonction de transfert (A.N. non attendues).

En haute fréquence, on a une pente à  $-40\text{dB/décades}$  et une phase de  $180^\circ$ . A l'inverse, en basse fréquence, le gain est constant tandis que le déphasage est nul. On en déduit que l'on étudie un second ordre de la forme :

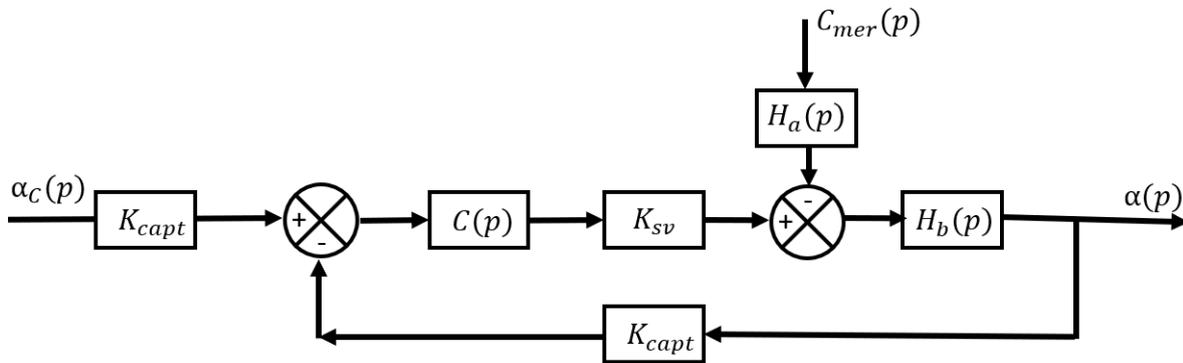
$$G(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

En basse fréquence, le gain vaut  $20 \cdot \log(K)$ .

A l'aide de la résonance et du facteur de surtension, on en déduit  $\xi : 20 \cdot \log\left(\frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}\right) = GdB_{max} - GdB(0)$

On déduit la pulsation propre grâce à :  $\omega_0 = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 - 2 \cdot \xi}}$

**Question 4** Proposer un schéma-blocs de l'asservissement de position du bateau où figureront notamment les blocs  $H_a(p)$  et  $H_b(p)$ . Indiquer les différentes entrées ainsi que les variables entre les blocs.



**Question 5** Montrer que le système asservi est stable quelle que soit la valeur de  $K_p$ .

Pour  $C_{mer}(p) = 0$ , on a :

$$\frac{\alpha(p)}{\alpha_c(p)} = \frac{\frac{K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1 + \frac{K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}{1 + K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

La FTBO est un second ordre dont tous les coefficients sont positifs. La marge de gain  $\gamma$  est infinie et la marge de phase strictement positive. Le système sera alors stable quelle que soit la valeur de  $K_p$ .

**Question 6** Déterminer l'erreur statique associée à une entrée  $\alpha_c(p)$  en échelon d'amplitude  $\alpha_{c0}$  (avec  $C_{mer} = 0$ ). En déduire la valeur minimale de  $K_p$  assurant le critère de précision.

D'après le théorème de la valeur finale, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_S &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (\alpha_c(p) - \alpha(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(1 - \frac{K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}{1 + K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}\right) \frac{\alpha_{c0}}{p} \\ \varepsilon_S &= \left(1 - \frac{K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}{1 + K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}\right) \cdot \alpha_{c0} \end{aligned}$$

Pour un respect du critère de précision, on veut :

$$\left(1 - \frac{K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}{1 + K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}\right) \leq 0.05$$

Soit :  $K_p \geq \frac{0.95}{0.05 \cdot K_{sv} \cdot K_b}$

On en déduit donc :

$$K_p \geq 9,5 \text{ rad/A}$$

**Autre solution :**

La classe de la FTBO est 0. Par conséquent, l'erreur vaut :

$$\varepsilon_S = \left(\frac{1}{1 + K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}\right) \cdot \alpha_{c0}$$

Pour un respect du critère de précision, on veut :  $\left(\frac{1}{1 + K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}\right) \leq 0.05$

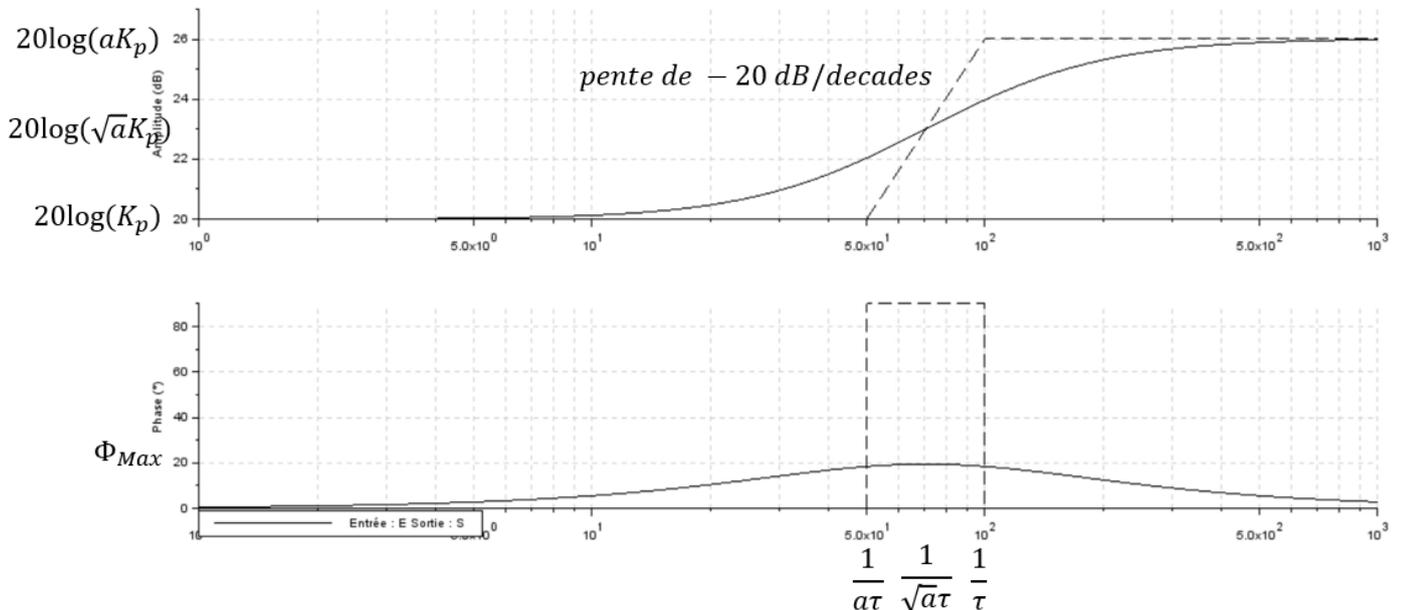
Soit :

$$K_p \geq \frac{0.95}{0.05 \cdot K_{sv} \cdot K_b}$$

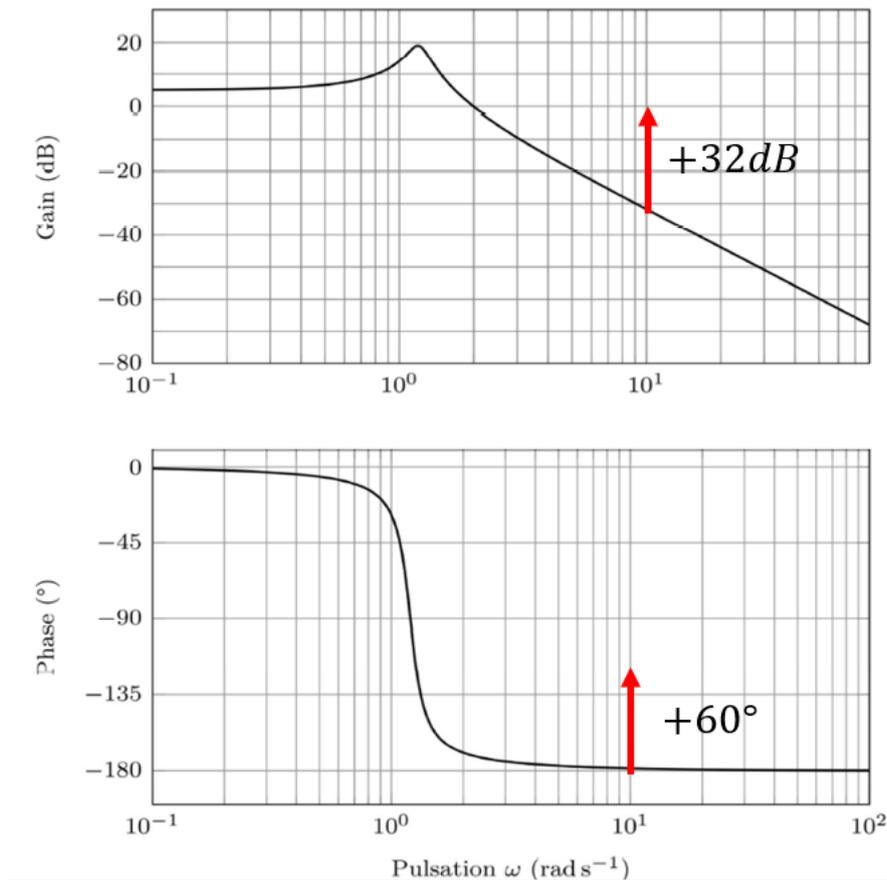
On en déduit donc :

$$K_p \geq 9,5 \text{ rad/A}$$

**Question 7** Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels (allures) de ce correcteur en précisant notamment les pentes, l'expression des gains et phases à basse fréquence, à haute fréquence et pour la pulsation particulière  $\omega_{Max}$ .



**Question 8** Déterminer la valeur de  $\Phi_{Max}$ , permettant de respecter la marge de phase sachant que la pulsation de coupure à 0dB souhaitée de la FTBO est de 10 rad/s. Décrire ensuite la démarche permettant de déterminer les valeurs de a,  $\tau$  et  $K_p$ . Les applications numériques ne sont pas demandées.



Pour respecter la marge de phase, il est nécessaire de monter la phase de  $\Phi_{Max} = 60^\circ$ . On en déduit ainsi la valeur de  $a$  :

$$a = \frac{1 + \sin(\Phi_{Max})}{1 - \sin(\Phi_{Max})}$$

On déduit ensuite la valeur de  $\tau$  :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot \omega_{0dB}}$$

Pour respecter la marge de gain, on doit monter le gain de 32dB. On en déduit ainsi la valeur de  $K_p$  :

$$10 \cdot \log(\alpha) + 20 \cdot \log(K_p) = 32$$

**Question 9** Préciser la pulsation du moment  $C_{mer}$ ; notée  $\omega_{mer}$ ; utilisée dans la simulation temporelle. En déduire alors, à partir des diagrammes de Bode, le rapport d'amplitudes  $\alpha/\omega_{mer}$ ; (sous la forme  $10^x$ ) que l'on obtient pour cette pulsation et comparer cette valeur avec celle obtenue sans système de stabilisation (cf. **Figure 12**). Commenter l'amélioration du système de stabilisation sur les diagrammes de Bode. Préciser l'atténuation apportée par le système de stabilisation (rapport de l'amplitude de l'angle de roulis avec stabilisation sur l'amplitude sans stabilisation) à partir de la réponse temporelle.

$$\omega_{mer} = \frac{2 \cdot \pi}{6} = 1 \text{ rad/s}$$

A l'aide du diagramme de Bode, on trouve :

$$\alpha/\omega_{mer} = 10^{-110/20} = 10^{-5}$$

On a donc amélioré le comportement en roulis.

A l'aide de la figure 11, on a une amplitude de l'angle de roulis de  $75^\circ$  crête à crête sans système de stabilisation contre  $7^\circ$  avec ce dernier. On en déduit donc une atténuation de  $7/75$ .

## 5 EXERCICE 5 : MAXPID MODELISATION DU CORRECTEUR PROPORTIONNEL, INTEGRAL, DERIVE

Expression de  $C(p)$  :

- Action proportionnelle :  $\boxed{Com_p(p) = K_p \cdot \varepsilon(p)}$

- Action dérivée :  $Com_d(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - Te)] \cdot K_d$  donc  $Com_d(t) = Te \cdot K_d \cdot \frac{d}{dt}(\varepsilon(t))$

d'où :  $\boxed{Com_d(p) = p \cdot Te \cdot K_d \cdot \varepsilon(p)}$

- action intégrale :

Méthode 1 :  $Com_i(t) = Com_i(t - Te) + K_i \cdot \varepsilon(t)$   
 $= Com_i(t - 2Te) + K_i[\varepsilon(t) + \varepsilon(t - Te) + \varepsilon(t - 2Te)]$   
 $= \dots = \frac{K_i}{Te} [Te \cdot \varepsilon(t) + Te \cdot \varepsilon(t - Te) + Te \cdot \varepsilon(t - 2Te) + \dots + Te \cdot \varepsilon(t_0)]$   
 $= \frac{K_i}{Te} \int_{t_0}^t \varepsilon(t) dt$  d'où  $\boxed{Com_i(p) = \frac{K_i}{Te \cdot p} \varepsilon(p)}$

Méthode 2 :  $Com_i(t) = Com_i(t - Te) + K_i \cdot \varepsilon(t)$

$$Com_i(t) - Com_i(t - Te) = K_i \cdot \varepsilon(t)$$

$$\frac{d}{dt} Com_i(t) Te = K_i \cdot \varepsilon(t) \text{ soit en Laplace : } p Com_i(p) Te = K_i \cdot \varepsilon(p)$$

D'où  $\boxed{Com_i(p) = \frac{K_i}{Te \cdot p} \varepsilon(p)}$

En définitive :  $Com(p) = \frac{3}{256} [Com_p(p) + \frac{Com_i(p)}{4} + 16Com_d(p)]$

$$= \frac{3}{256} [K_p + \frac{K_i}{4Te \cdot p} + 16K_d \cdot Te \cdot p] \varepsilon(p)$$

Donc  $\boxed{C(p) = \frac{3}{256} [K_p + \frac{K_i}{4Te \cdot p} + 16K_d \cdot Te \cdot p]}$

## 6 EXERCICE 6 : PROTHESE DE MAIN MYOELECTRIQUE

### 6.1 Modélisation de l'actionneur

Q 11. En appliquant la loi des mailles sur le circuit a, il vient

$$u_a - u_{Ra}(t) - u_{La}(t) + e_{a(t)} = 0$$

Comme

$$u_{Ra}(t) = R_a i_a(t) ; u_{La}(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} ; e_{a(t)} = - \frac{d\Phi_a}{dt}$$

Il vient

$$u_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} - K_m \dot{\theta}_1 \sin(N\theta_1)$$

On fait de même pour le circuit  $b$

$$u_b(t) = R_b i_b(t) + L_b \frac{di_b(t)}{dt} + K_m \dot{\theta}_1 \cos(N\theta_1)$$

**Q 12.** Les puissances électriques instantanées absorbées par les phases  $a$  et  $b$  sont respectivement

$$p_a(t) = u_a(t) i_a(t) ; p_b(t) = u_b(t) i_b(t)$$

La puissance électrique instantanée totale absorbée par l'actionneur s'écrit sous la forme :

$$p_{mpp}(t) = p_a(t) + p_b(t)$$

$$p_{mpp}(t) = R_a i_a^2(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} i_a(t) - K_m \dot{\theta}_1 \sin(N\theta_1) i_a(t) + R_b i_b^2(t) + L_b \frac{di_b(t)}{dt} i_b(t) + K_m \dot{\theta}_1 \cos(N\theta_1) i_b(t)$$

Que l'on peut noter

$$p_{mpp}(t) = p_J(t) + p_{em}(t) + p_{tr}(t)$$

Avec

$$p_J(t) = R_a i_a^2(t) + R_b i_b^2(t)$$

$$p_{em}(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (L_a i_a^2(t) + L_b i_b^2(t)) \right)$$

$$p_{tr}(t) = K_m \dot{\theta}_1 (\cos(N\theta_1) i_b(t) - \sin(N\theta_1) i_a(t))$$

**Q 13.** Le couple moteur est alors

$$c_{mot}(t) = \frac{\partial p_{tr}}{\partial \dot{\theta}_1} = K_m (\cos(N\theta_1) i_b(t) - \sin(N\theta_1) i_a(t))$$

**Q 14.** On a

$$\vec{X} = a(\cos(N\theta_1) \vec{d} - \sin(N\theta_1) \vec{q}) + b(\sin(N\theta_1) \vec{d} + \cos(N\theta_1) \vec{q}) = d\vec{d} + q\vec{q}$$

Soit

$$P(N\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos(N\theta_1) & \sin(N\theta_1) \\ -\sin(N\theta_1) & \cos(N\theta_1) \end{bmatrix}$$

Pour une matrice de rotation, la matrice  $P^{-1}(N\theta_1) = {}^T P(N\theta_1)$ .

$$P^{-1}(N\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos(N\theta_1) & -\sin(N\theta_1) \\ \sin(N\theta_1) & \cos(N\theta_1) \end{bmatrix}$$

**Q 15.** Les 2 équations électriques de l'actionneur dans la base fixe  $(\vec{a}, \vec{b})$  s'écrivent

$$\begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} + L_a \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} + K_m \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} -\sin(N\theta_1) \\ \cos(N\theta_1) \end{pmatrix}$$

En multipliant par  $P(N\theta_1)$ , il vient

$$P(N\theta_1) \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = R \cdot P(N\theta_1) \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} + L \cdot P(N\theta_1) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} + K_m \dot{\theta}_1 \cdot P(N\theta_1) \begin{pmatrix} -\sin(N\theta_1) \\ \cos(N\theta_1) \end{pmatrix}$$

Or

$$\begin{aligned} P(N\theta_1) \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} ; P(N\theta_1) \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} \\ P(N\theta_1) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt} \left[ P(N\theta_1) \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} \frac{dP(N\theta_1)}{dt} \\ P(N\theta_1) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + N\omega_{mot} \begin{bmatrix} \sin(N\theta_1) & -\cos(N\theta_1) \\ \cos(N\theta_1) & \sin(N\theta_1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} \\ P(N\theta_1) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + N\omega_{mot} \begin{bmatrix} \sin(N\theta_1) & -\cos(N\theta_1) \\ \cos(N\theta_1) & \sin(N\theta_1) \end{bmatrix} P^{-1}(N\theta_1) \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} \\ P(N\theta_1) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + N\omega_{mot} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et

$$P(N\theta_1) \begin{pmatrix} -\sin(N\theta_1) \\ \cos(N\theta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, dans la base tournante  $(\vec{d}, \vec{q})$  il vient :

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + L \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + N\omega_{mot} \begin{pmatrix} 0 & -L \\ L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + K_m \omega_{mot} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Q 16.**

Les pertes par effet joules sont

$$p_j(t) = R_a i_d^2(t) + R_b i_q^2(t)$$

Donc pour minimiser on prend

$$\frac{\partial p_j(t)}{\partial i_d} = 0 \Rightarrow i_d = 0$$

Donc

$$\begin{aligned} u_d &= -NL\omega_{mot}i_q \\ u_q &= Ri_q + L\frac{di_q}{dt} + K_m\omega_{mot} \end{aligned}$$

Donc on a toujours couplage des tensions mais le système est linéaire.

## 6.2 – Étude du contrôle en couple de l'actionneur

**Q 17.**  $F$  est un point de fonctionnement donc ses grandeurs vérifient

$$\begin{pmatrix} U_{d0} \\ U_{q0} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} I_{d0} \\ I_{q0} \end{pmatrix} + N\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & -L \\ L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{d0} \\ I_{q0} \end{pmatrix} + K_m\omega_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En supposant des variations  $\delta u_d(t)$ ,  $\delta u_q(t)$ ,  $\delta i_d(t)$ ,  $\delta i_q(t)$  autour de  $F$ , on peut écrire

$$\begin{pmatrix} U_{d0} + \delta u_d(t) \\ U_{q0} + \delta u_q(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} I_{d0} + \delta i_d(t) \\ I_{q0} + \delta i_q(t) \end{pmatrix} + L \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta i_d(t) \\ \delta i_q(t) \end{pmatrix} + N\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & -L \\ L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{d0} + \delta i_d(t) \\ I_{q0} + \delta i_q(t) \end{pmatrix} + K_m\omega_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par soustraction des deux systèmes, on obtient

$$\begin{aligned} \delta u_d(t) &= R\delta i_d(t) + L\frac{d\delta i_d(t)}{dt} - N\omega_0\delta i_q(t) \\ \delta u_q(t) &= R\delta i_q(t) + L\frac{d\delta i_q(t)}{dt} - N\omega_0\delta i_d(t) \end{aligned}$$

**Q 18.** Par transformée de Laplace des équation précédentes,

$$\begin{aligned} U_d(p) &= (R + Lp)I_d(p) - N\omega_0 I_q(p) \\ U_q(p) &= (R + Lp)I_q(p) + N\omega_0 I_d(p) \end{aligned}$$

En prenant  $U_d(p) = 0$ , on obtient

$$U_q(p) = (R + Lp)I_q(p) + N\omega_0 I_d(p) = (R + Lp)I_q(p) + \frac{(N\omega_0)^2}{(R + Lp)} I_q(p)$$

$$\left. \frac{I_q(p)}{U_q(p)} \right|_{U_d(p)=0} = \frac{(R + Lp)}{(R + Lp)^2 + (N\omega_0)^2}$$

**Q 19.** On veut une erreur statique nulle ce qui conduit à ajouter un intégrateur dans la BO. Mais la marge de phase élevée conduit à limiter son influence aux basses fréquences d'où l'utilisation d'un correcteur PI.

**Q 20.** Le minimal me pose problème ...

La marge de phase du système est  $M\varphi = 120^\circ$

La marge de phase minimale atteignable par le système ... par variation du gain ... est de  $M\varphi = 90^\circ$

**Q 21.** La question est mal posée, on veut  $75^\circ$  à la même pulsation de coupure que sans correction c'est-à-dire  $\omega_{0dB} \approx 1,2 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , sinon, on ne peut pas résoudre !

A cette pulsation on veut donc une phase corrigée

$$\varphi_{cor} = 75^\circ - 180^\circ = -105^\circ$$

Soit

$$\begin{aligned} \varphi_{cor} &= \varphi_{Ncor} + \varphi(C_q) \approx -60^\circ - 90^\circ + \arctan(T_{iq}\omega_{0dB}) = -105^\circ \\ \arctan(T_{iq}\omega_{0dB}) &\approx 45^\circ \end{aligned}$$

Ce qui conduit à

$$T_{iq} \approx \frac{1}{\omega_{0dB}} \approx 0,8 \text{ ms}$$

**Q 22.** Pour avoir une marge de phase de  $90^\circ$ , la pulsation de coupure à  $0dB$  doit être effectivement  $\omega_{0dB} \approx 1,2 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ce qui conduit à baisser la courbe de  $3dB$  donc

$$K_{iq} \approx 0,7 \text{ V} \cdot \text{A}^{-1}$$

Remarque : pour  $K_{iq} = 1 \text{ V} \cdot \text{A}^{-1}$ , on a une marge de phase de  $83^\circ$ . Est-il bien nécessaire de la modifier ??

**Q 23.** Pour le point de fonctionnement  $F$ .

- L'erreur statique est nulle
- Le temps de réponse à 5% est de l'ordre de 10 ms donc inférieure à 13 ms.
- Il n'y a pas de dépassement
- La marge de gain est infinie et la marge de phase est de 90°

Les critères du cahier des charges sont vérifiés

**Q 24.** Le système étant à retour unitaire, FTBF s'écrit

$$FTBF = \frac{FTBO}{1 + FTBO} = \frac{K(1 + T_1 p)}{p(1 + T_2 p) + K(1 + T_1 p)} = \frac{(1 + T_1 p)}{1 + \frac{(KT_1 + 1)}{K}p + \frac{T_2}{K}p^2}$$

C'est la réponse d'un second ordre à un échelon + une impulsion.

Le second ordre a une pulsation propre du système non amorti

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{T_2}}$$

Et un coefficient d'amortissement

$$z = \frac{1}{2} \frac{(KT_1 + 1)}{K} \sqrt{\frac{K}{T_2}}$$

Application numérique :

$$z = 0,72$$

Le système présente donc un dépassement pour la réponse indiciel, dépassement augmenté par la réponse impulsionnelle, ce qui ne valide pas le critère du cahier des charges

**Q 25.** Les critères de dépassement et d'erreur en régime permanent sont vérifiés à  $\Delta I$  près du fait du correcteur. Ce qui permet de contrôler ce dépassement.

Le temps de réponse à 5% est lui très faible, de l'ordre de 0,5 ms.

### 6.3 Étude d'une évolution fonctionnelle de la prothèse myoélectrique

**Q 26.** Par transformée de Laplace inverse du correcteur, en supposant les conditions initiales nulles, on a

$$T_p \frac{di_{qcons}(t)}{dt} = K_p \varepsilon_\theta(t) + K_p T_p \frac{d\varepsilon_\theta(t)}{dt}$$

**Q 27.** Le développement de Taylor à l'ordre un donne

$$i_{qcons}(t - T_e) = i_{qcons}(t) - T_e \frac{di_{qcons}(t)}{dt}$$

De même

$$\varepsilon_\theta(t - T_e) = \varepsilon_\theta(t) - T_e \frac{d\varepsilon_\theta(t)}{dt}$$

Ainsi

$$\frac{di_{qcons}(t)}{dt} = \frac{1}{T_e} [i_{qcons}(t) - i_{qcons}(t - T_e)]$$

Et

$$\frac{d\varepsilon_\theta(t)}{dt} = \frac{1}{T_e} [\varepsilon_\theta(t) - \varepsilon_\theta(t - T_e)]$$

L'équation différentielle s'écrit, pour  $t = nT_e$

$$T_p \frac{di_{qcons}(nT_e)}{dt} = K_p \varepsilon_\theta(nT_e) + K_p T_p \frac{d\varepsilon_\theta(nT_e)}{dt}$$

D'où la relation de récurrence

$$\frac{T_p}{T_e} [i_{qcons}(nT_e) - i_{qcons}((n-1)T_e)] = K_p \varepsilon_\theta(nT_e) + \frac{K_p T_p}{T_e} [\varepsilon_\theta(nT_e) - \varepsilon_\theta((n-1)T_e)]$$

Ou encore

$$i_{qcons}(nT_e) = i_{qcons}((n-1)T_e) + \left(\frac{T_e}{T_p} + 1\right) K_p \varepsilon_\theta(nT_e) - K_p \varepsilon_\theta((n-1)T_e)$$

Donc

$$A = 1 ; B = \left(\frac{T_e}{T_p} + 1\right) K_p ; C = -K_p$$

Q 28.

