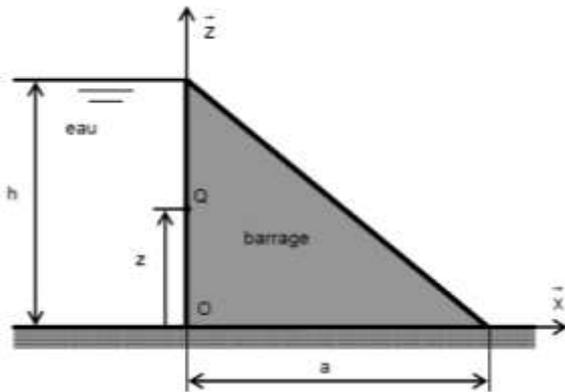


Modélisation des actions mécaniques agissant sur un barrage poids - Corrigé

Q.1. Le barrage présente un plan de symétrie $(O\bar{x},\bar{z})$. Le centre de gravité est donc dans ce plan.



On projette $m_i \cdot \vec{OG}_i = \int_{(S_i)} \vec{OP} \cdot dm$ sur les axes choisis :

$$m_i \cdot x_{G_i} = \int_{(S_i)} x_p \cdot dm \text{ ou } m_i \cdot z_{G_i} = \int_{(S_i)} z_p \cdot dm$$

$$\rightarrow \frac{a \cdot h}{2} \cdot x_G = \iint_{xz} x \cdot dx \cdot dz$$

$$\rightarrow \frac{a \cdot h}{2} \cdot x_G = \int_x x \cdot dx \cdot [z]_0^{\frac{h}{a} \cdot x + h}$$

$$\rightarrow \frac{a \cdot h}{2} \cdot x_G = \int_x \left(-\frac{h}{a} \cdot x^2 + h \cdot x \right) \cdot dx$$

$$\rightarrow \frac{a \cdot h}{2} \cdot x_G = \left[-\frac{h}{3 \cdot a} \cdot x^3 + h \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^a \rightarrow \frac{a \cdot h}{2} \cdot x_G = -\frac{h \cdot a^2}{3} + \frac{h \cdot a^2}{2} \rightarrow x_G = -\frac{2 \cdot a}{3} + a = \frac{a}{3}$$

Par analogie on trouve : $z_G = \frac{h}{3}$

$$m_i \cdot z_{G_i} = \int_{(S_i)} z_p \cdot dm \rightarrow \frac{a \cdot h}{2} \cdot z_G = \iint_{xz} z \cdot dx \cdot dz \rightarrow \frac{a \cdot h}{2} \cdot z_G = \int_z z \cdot dz \cdot [x]_0^{\frac{a}{h} \cdot z + a} \rightarrow \frac{a \cdot h}{2} \cdot z_G = \int_z \left(-\frac{a}{h} \cdot z^2 + a \cdot z \right) \cdot dz$$

$$\rightarrow \frac{a \cdot h}{2} \cdot z_G = \left[-\frac{a}{3 \cdot h} \cdot z^3 + a \cdot \frac{z^2}{2} \right]_0^h \rightarrow \frac{a \cdot h}{2} \cdot z_G = -\frac{a \cdot h^2}{3} + \frac{a \cdot h^2}{2} \rightarrow z_G = -\frac{2 \cdot h}{3} + h = \frac{h}{3}$$

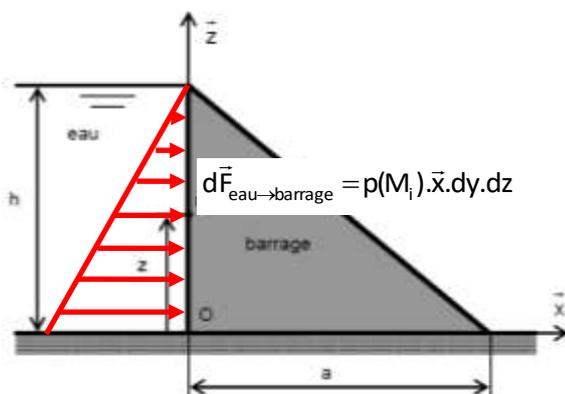
Q.2. $\left\{ \begin{matrix} \vec{F}_{g \rightarrow \text{barrage}} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} -M \cdot g \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$

$$\vec{M}_{O(g \rightarrow \text{barrage})} = \vec{M}_{G(g \rightarrow \text{barrage})} + \vec{OG} \wedge -M \cdot g \cdot \vec{z} = \left(\frac{a}{3} \cdot \vec{x} + \frac{a}{3} \cdot \vec{z} \right) \wedge -M \cdot g \cdot \vec{z} = M \cdot g \cdot \frac{a}{3} \cdot \vec{y}$$

$$\left\{ \vec{F}_{g \rightarrow \text{barrage}} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} -M \cdot g \cdot \vec{z} \\ M \cdot g \cdot \frac{a}{3} \cdot \vec{y} \end{matrix} \right\}_O$$

Q.3.

Modèle local



Modèle local :

Sur chaque élément de surface $dS=dy \cdot dz$ situé autour d'un point M_i de la paroi s'exerce un effort élémentaire $d\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = p(M_i) \cdot \vec{x} \cdot dy \cdot dz$

$$\vec{OM}_i = y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z} \text{ avec } z \in [0, h] \text{ et } y \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right]$$

Les lois de l'hydrostatique permettent d'écrire $p(M_i) = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (h - z)$

Modèle global : $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} \\ \vec{M}_{A(\text{eau} \rightarrow \text{barrage})} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \int_{(S)} d\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} \\ \vec{M}_{A(\text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \int_{(S)} \vec{AM}_i \wedge d\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} \end{array} \right\}$ (A point quelconque).

$$\vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \int_{(S)} d\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \int_{(S)} \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (h-z) \cdot \vec{x} \cdot dy \cdot dz = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot \vec{x} \cdot \int_0^h (h-z) \cdot dz \cdot \int_{-l/2}^{l/2} dy = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot \vec{x} \cdot \left[h \cdot z - \frac{z^2}{2} \right]_0^h \cdot l$$

$$\vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot \frac{h^2}{2} \cdot l \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} \text{ correspond à la poussée de l'eau.}$$

Le point pour lequel le moment résultant est nul est dans le plan $(O\vec{x}, \vec{z})$. Calcul du moment résultant pour un point Q appartenant au plan $(O\vec{x}, \vec{z})$:

$$\vec{M}_{Q(\text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \int_{(S)} \vec{QM}_i \wedge \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (h-z) \cdot \vec{x} \cdot dy \cdot dz = \int_{(S)} (\vec{QO} + \vec{OM}_i) \wedge \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (h-z) \cdot \vec{x} \cdot dy \cdot dz$$

$$\vec{M}_{Q(\text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \int_{(S)} (-z_Q \cdot \vec{z} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}) \wedge \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (h-z) \cdot \vec{x} \cdot dy \cdot dz$$

$$\vec{M}_{Q(\text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \int_{(S)} (-\rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (h-z) \cdot y \cdot \vec{z} \cdot dy \cdot dz + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (h-z) \cdot (z-z_Q) \cdot \vec{y} \cdot dy \cdot dz)$$

$$\vec{M}_{Q(\text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = -\rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot \vec{z} \cdot \int_0^h (h-z) \cdot dz \cdot \int_{-l/2}^{l/2} y \cdot dy + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot \vec{y} \cdot \int_0^h (h-z) \cdot (z-z_Q) \cdot dz \cdot \int_{-l/2}^{l/2} y \cdot dy$$

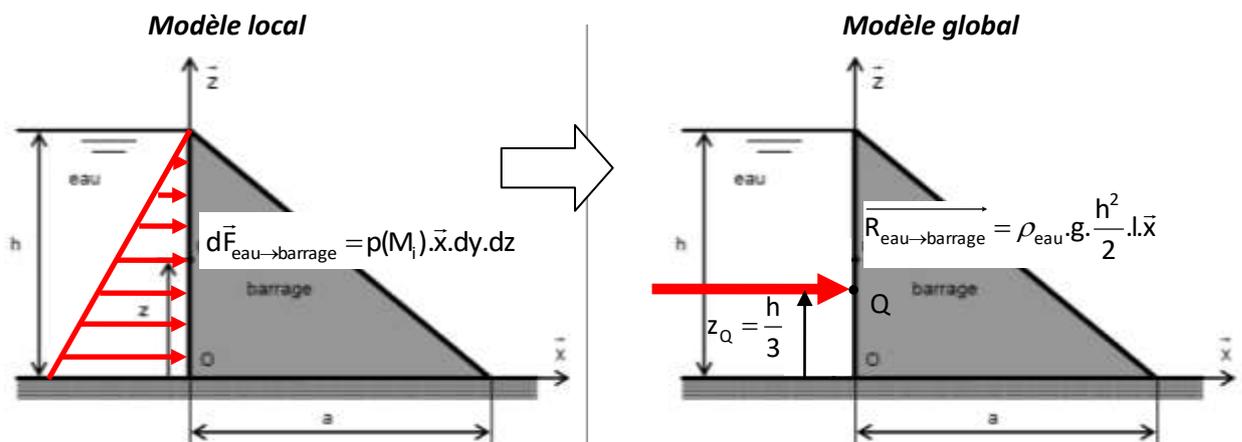
$$\vec{M}_{Q(\text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot l \cdot \vec{y} \cdot \int_0^h (h \cdot z - h \cdot z_Q - z^2 + z \cdot z_Q) \cdot dz$$

$$\vec{M}_{Q(\text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot l \cdot \vec{y} \cdot \left[h \cdot \frac{z^2}{2} - h \cdot z_Q \cdot z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} \cdot z_Q \right]_0^h$$

$$\vec{M}_{Q(\text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot l \cdot \left(\frac{h^3}{2} - h^2 \cdot z_Q - \frac{h^3}{3} + \frac{h^2}{2} \cdot z_Q \right) \cdot \vec{y}$$

$$\vec{M}_{Q(\text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot l \cdot \left(\frac{h^3}{6} - \frac{h^2}{2} \cdot z_Q \right) \cdot \vec{y} \rightarrow \text{Il existe un point Q pour lequel } \vec{M}_{Q(\text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \vec{0}$$

$$\rightarrow \text{pour } z_Q = \frac{h}{3} \text{ et } y_Q = 0 \rightarrow \vec{M}_{Q(\text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \vec{0} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot \frac{h^2}{2} \cdot l \cdot \vec{x} \\ \vec{M}_{Q(\text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \vec{0} \end{array} \right\}$$



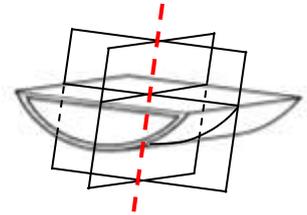
Q.4. $\vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot \frac{h^2}{2} \cdot l \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}}$ correspond à la poussée de l'eau.

A.N. : $\|\vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}}\| = 1000 \times 9,81 \times \frac{30^2}{2} \times 80 = 265 \cdot 10^6 \text{ N} < 300 \cdot 10^6 \text{ N} \rightarrow$ cahier des charges ok.

Barrage de la Tamise - Corrigé

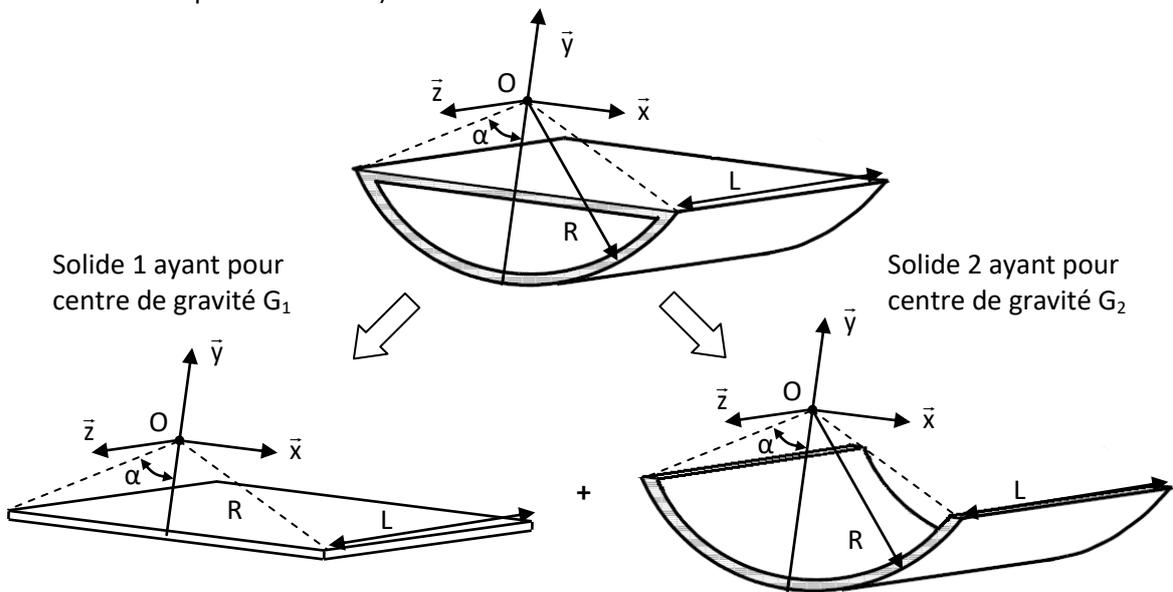
On cherche les coordonnées du centre de gravité G du solide S par rapport au point O tel que $\vec{OG} = x_G \cdot \vec{x} + y_G \cdot \vec{y} + z_G \cdot \vec{z}$.

Le système possède 2 plans de symétrie perpendiculaires, le centre de gravité est sur la droite intersection des 2 plans de symétrie.



$\rightarrow z_G = -\frac{L}{2}$ et $x_G = 0$

On décompose le système en solides élémentaires (les solides élémentaires possèdent les deux mêmes plans de symétrie identifiés précédemment).



Il y a un plan de symétrie supplémentaire sur le solide 1.

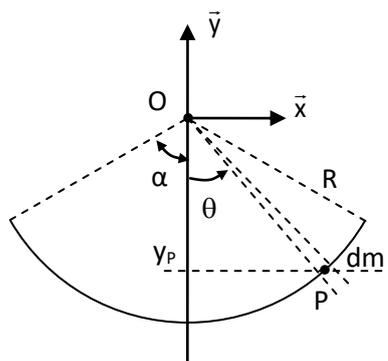
\rightarrow Il y a 3 plans de symétrie perpendiculaires le centre de gravité de S1 est à (On connaît déjà les coordonnées de G_1 sur \vec{x} et \vec{z}) :

$y_{G1} = -R \cdot \cos \alpha$ (si e est considéré comme négligeable).

Il n'y a pas de plan de symétrie supplémentaires pour le solide 2.

On utilise la définition $m_i \cdot \vec{OG}_i = \int_{(S_i)} \vec{OP} \cdot dm$ que l'on projette sur l'axe \vec{y}

(On connaît déjà les coordonnées de G_2 sur \vec{x} et \vec{z}) :



$$m_2 \cdot y_{G2} = \int_{(S2)} y_p \cdot dm$$

avec $m_2 = \rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \alpha)$ et $dm = \rho \cdot e \cdot L \cdot R \cdot d\theta$

$$2 \cdot R \cdot \alpha \cdot y_{G2} = \int_{-\alpha}^{\alpha} -R \cdot \cos \theta \cdot R \cdot d\theta$$

$$2 \cdot R \cdot \alpha \cdot y_{G2} = -2 \cdot R^2 \cdot \sin \alpha$$

$$y_{G2} = -R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

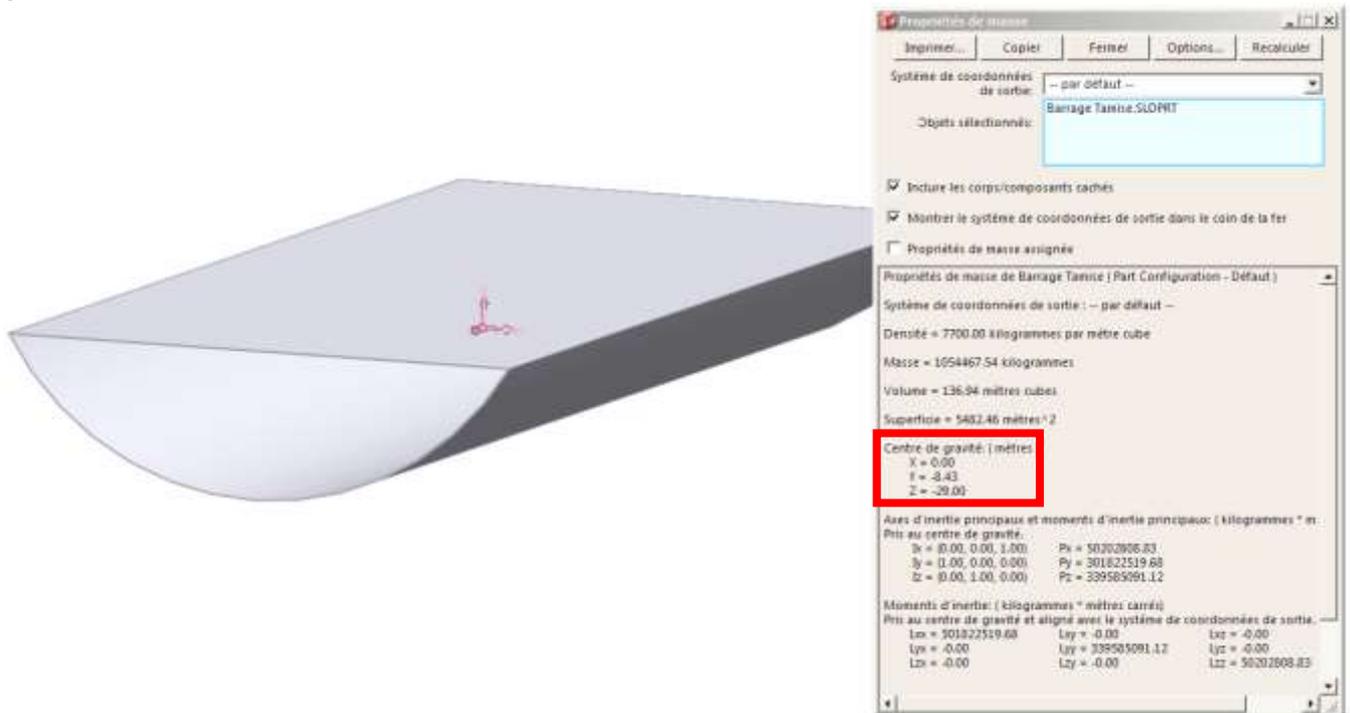
On utilise enfin la formule du barycentre $M_{tot} \cdot \vec{OG} = \sum_i m_i \cdot \vec{OG}_i$ que l'on projette sur l'axe \bar{y} :

$$M_{tot} \cdot y_G = \sum_i m_i \cdot y_i \rightarrow (m_1 + m_2) \cdot y_G = m_1 \cdot y_{G1} + m_2 \cdot y_{G2} \text{ avec } m_1 = \rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \sin \alpha) \text{ et } m_2 = \rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \alpha)$$

$$y_G = \frac{m_1 \cdot y_{G1} + m_2 \cdot y_{G2}}{(m_1 + m_2)} = \frac{-\rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \sin \alpha) \cdot R \cdot \cos \alpha - \rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \alpha) \cdot R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}}{\rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \alpha) + \rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \sin \alpha)} = \frac{-R \cdot \sin \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)}{\alpha + \sin \alpha}$$

$$\text{A.N. : } y_G = \frac{-R \cdot \sin \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)}{\alpha + \sin \alpha} = \frac{-12,4 \sin \frac{60 \cdot \pi}{180} (1 + \cos \frac{60 \cdot \pi}{180})}{\frac{60 \cdot \pi}{180} + \sin \frac{60 \cdot \pi}{180}} = -8,42 \text{ m}$$

La construction du modèle sous Solidworks permet de déterminer rapidement les coordonnées du centre de gravité.



Les 1 cm d'écart obtenus entre les calculs et le modèle Solidworks proviennent de l'hypothèse $e \ll R$ faite pour les calculs.

Modélisation des actions mécaniques de contact sur un palier lisse - Corrigé

$$\mathbf{Q.1.} \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ M_{O(2 \rightarrow 1)} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \int d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ M_{O(2 \rightarrow 1)} = \int_{(S)} \vec{OM} \wedge d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \end{matrix} \right\} \text{ où } d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = p \cdot dS \cdot \vec{r} \text{ avec } dS = R \cdot d\theta \cdot dz \text{ et } \vec{r} = \cos \theta \cdot \vec{x} + \sin \theta \cdot \vec{y}$$

Calcul de la résultante :

$$\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \int_{(S)} d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \int_{(S)} p \cdot R \cdot d\theta \cdot dz \cdot (\cos \theta \cdot \vec{x} + \sin \theta \cdot \vec{y}) = p \cdot R \cdot \vec{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \cdot d\theta \cdot \int_{-L/2}^{L/2} dz + p \cdot R \cdot \vec{y} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \cdot d\theta \cdot \int_{-L/2}^{L/2} dz$$

$$\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = 2 \cdot p \cdot R \cdot L \cdot \vec{x} \text{ (On remarque que } 2 \cdot R \cdot L \text{ correspond à la surface projetée du } \frac{1}{2} \text{ cylindre).}$$

Calcul du moment résultant : On a $\vec{OM} = R\vec{r} + z\vec{z}$

$$\vec{M}_{O(2 \rightarrow 1)} = \int_{(S)} \vec{OM} \wedge p.R.d\theta.dz.\vec{r} = \int_{(S)} (R\vec{r} + z\vec{z}) \wedge p.R.d\theta.dz.\vec{r} = \int_{(S)} p.R.d\theta.z.dz.\vec{v}$$

$$\vec{M}_{O(2 \rightarrow 1)} = \int_{(S)} p.R.d\theta.z.dz.(-\sin\theta.\vec{x} + \cos\theta.\vec{y}) = p.R.\vec{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\sin\theta.d\theta \int_{-L/2}^{L/2} z.dz + p.R.\vec{y} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta.d\theta \int_{-L/2}^{L/2} z.dz$$

$$\vec{M}_{O(2 \rightarrow 1)} = \vec{0}$$

$$D'où : \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{O(2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = 2.p.R.L.\vec{x} \\ \vec{M}_{O(2 \rightarrow 1)} = \vec{0} \end{array} \right\}$$